

جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
الإدارة العامة لشئون الكتب





الرياضيات

الصف الثانى الإعدادى

للفصلين الدراسيين الأول والثانى

طبعة ٢٠٢٤-٢٠٢٥م



الرياضيات

الصف الثانى الإعدادى

الفصلين الدراسيين

٢٠٢٤ - ٢٠٢٥

تأليف

أ. عمر فؤاد جاب الله

أد. عفاف أبو الفتوح صالح | د. عصام وصفى روفائيل

أ. محمود ياسر الخطيب | أ. سيرافيم الياس اسكندر

مراجعة

الإدارة المركزية لتطوير المناهج

طبعة ٢٠٢٥/٢٠٢٤ م

الاسم: ....

الفصل: ....

المدرسة: ....

العنوان: ....

المواصفات الفنيــة:

رقم الكتاب	مقاس الكتاب	طبع المتن	طبع الغلاف	ورق المتن	ورق الغلاف	عدد الصفحات بالغلاف
٢١٥/١/٢/٣٣/٢/١٠	$\frac{1}{8}$ (٥٧×٨٢)سم	٤ لون	٤ لون	٧٠ جم أبيض	١٨٠ جم كوشية	١٨٠ صفحة

http://elearning.moe.gov.eg



مطبعة الياسر

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

أبناءنا الأعزاء :

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثانى الإعدادى، وقد راعينا أن نجعل من دراستك للرياضيات عملًا ممتعًا ومفيدًا له تطبيقاته فى حياتكم العملية، ، وفى دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعورا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقدروا ، دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسى، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفى نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى فى هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية، وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوى لكم وما سبق أن تم دراسته فى الصفوف السابقة، كما راعينا فى مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتى لديكم ، كما تم توظيف الآلة الحاسبة والحاسب الآلى كلما كان ذلك مناسبًا داخل المحتوى.

وفى الجزء الخاص بالأنشطة و التدريبات :

يوجد تمارين على كل درس ، وتمارين عامة على الوحدة ، ونشاط خارجى ، واختبار فى نهاية كل وحدة ، وفى نهاية الفصل الدراسى اختبارات عامة تساعدك على مراجعة المقرر كاملاً ، حيث تم رفعها على موقع الوزارة الإلكترونى.

نرجو أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لك ولمصرنا العزيزة.

المؤلفون





المحتويات

الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية

الوحدة الثانية: العلاقة بين متغيرين

الوحدة الثالثة: الإحصاء

الوحدة الرابعة: متوسطات المثلث و المثلث المتساوي الساقين

الوحدة الخامسة: التباين

الرموز الرياضية المستخدمة

الرمز	المعنى	الرمز	المعنى
ط	مجموعة الأعداد الطبيعية	$\perp$	عمودى على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	//	يوازى
ن	مجموعة الأعداد النسبية	$\overline{\text{اب}}$	القطعة المستقيمة اب
نَ	مجموعة الأعداد غير النسبية	$\overleftarrow{\text{اب}}$	الشعاع اب
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	$\overleftrightarrow{\text{اب}}$	المستقيم اب
$\sqrt{\text{ا}}$	الجذر التربيعى للعدد ا	ق ($\angle$ ل)	قياس زاوية ل
$\sqrt[3]{\text{ا}}$	الجذر التكعيبى للعدد ا	$\sim$	تشابه
[أ ، ب]	فترة مغلقة	$<$	أكبر من
]أ ، ب[	فترة مفتوحة	$\leq$	أكبر من أو يساوى
]أ ، ب]	فترة نصف مفتوحة (مغلقة)	$>$	أقل من
[أ ، ب[	فترة نصف مفتوحة (مغلقة)	$\geq$	أقل من أو يساوى
[أ ، ∞[	فترة غير محدودة	ل(ا)	احتمال وقوع الحدث ا
$\equiv$	تطابق		

الوحدة الأولى

١

الأعداد الحقيقية

- الأعدادُ الحقيقيَّة
  - الأعداد النسبيةُ
    - الأعداد الصحيحة
      - الأعداد الطَّبيعية
        - الصفر
        - الأعداد الصَّحيحة الموجبة (أعداد العد)
      - الأعداد الصحيحة السالبة
    - الأعداد غير الصَّحيحة
  - الأعدادُ غير النسبية

مراجعة

فكّر وناقش

مجموعات الأعداد

مجموعة أعداد العد : ع = {١، ٢، ٣، ...}

مجموعة الأعداد الطَّبيعية : ط = {٠، ١، ٢، ٣، ...} = ع ∪ {٠}

مجموعة الأعداد الصحيحة : صـ = {...، ٣، ٢، ١، ٠، -١، -٢، -٣، ...}

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $صـ_+$ = {١، ٢، ٣، ...} = ع

مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $صـ_-$ = {-١، -٢، -٣، ...}

$صـ = صـ_+ \cup \{٠\} \cup صـ_-$

مجموعة الأعداد النسبية ن = $\{\frac{أ}{ب} : أ، ب \in صـ، ب \neq ٠\}$

ن

صـ

ط

ط ⊂ صـ ⊂ ن

القيمةُ المطلقةُ للعددِ النسبيِّ:

|-٧| = ٧، |٣| = ٣، |٠| = ٠ ، $|-\frac{٥}{٣}| = \frac{٥}{٣}$

إذا كان |أ| = ٥ فإن أ = ±٥

الصورةُ القياسيةُ للعددِ النسبيِّ هي:

أ × $١٠^{ن}$ حيث ن ∈ صـ ، ١ ≤ |أ| < ١٠

مثلاً العدد ٢٥,٣٢ × ١٠⁴ في صورته القياسية = ٢,٥٣٢ × ١٠⁵

٠,٠٠٠٥٣ في صورته القياسية = ٥,٣ × ١٠⁻⁴

العددُ النسبيُّ المربّع الكامل

هو العددُ الموجبُ الذى يمكن كتابته على صورة مربع عددٍ نسبى أى (عدد نسبى)²

مثل ١ ، ٤ ، ٢٥ ، $\frac{٩}{١٦}$ ، ٢$\frac{١}{٤}$ ، ...

العددُ النسبى المكعب الكامل

هو العددُ النسبىُّ الذى يمكن كتابته على صورةِ مكعب عدد نسبى أى (عدد نسبى)³

مثل ١ ، ٨ ، -٢٧ ، -٢١٦ ، $\frac{٨}{١٢٥}$ ، ...

الجذرُ التَّربيعىُّ للعددِ النّسبى المربع الكامل

- الجذر التربيعىُّ للعددِ النسبى الموجب أ هو العدد الذى مربعه يساوى أ
- $\sqrt{\text{صفر}}$ = صفر
- كلُّ عددٍ نسبىٍّ مربع كامل أ له جذران تربيعيان كل منهما معكوس جمعىّ للآخر وهما

$\sqrt{أ}$ ، -$\sqrt{أ}$

مثلاً العدد $\frac{١٦}{٢٥}$ له جذران تربيعيان هما $\frac{٤}{٥}$ ، -$\frac{٤}{٥}$

- $\sqrt{٩}$ يعنى الجذر التربيعىّ الموجب للعدد ٩ وهو ٣
- $\sqrt{(\frac{أ}{ب})^٢}$ = $|\frac{أ}{ب}|$ أى أن $\sqrt{(-٧)^٢}$ = |-٧| = ٧

الجذر التكعيبى للعدد النسبى

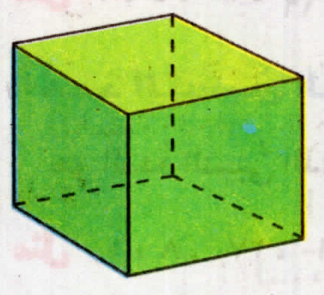
فكر وناقش

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد الجذر التَّكعيبى لعددٍ نسبيٍّ باستخدام التَّحليل.
- إيجاد الجذر التَّكعيبى لعدد نسبيٍّ باستخدام الآلة الحاسبة.
- حل معادلات تشمل إيجاد الجذر التَّكعيبى.
- حلّ تطبيقات على الجذر التَّكعيبى لعدد نسبى.

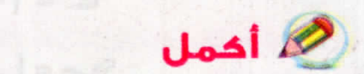
المصطلحات الأساسية

- جذر تكعيبى.



سبق أن تعلمت أن:

حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه



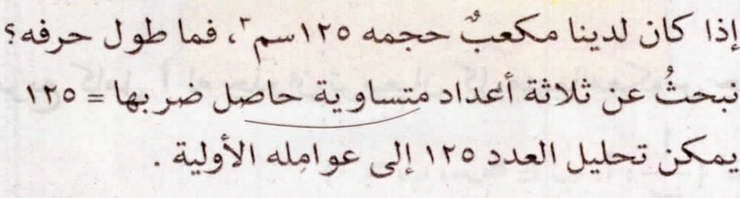
أكمل

المكعبُ الذى طول حرفه ٧سم يكون حجمه = ... × .... × ....

= .... سم^{٣}



هيا نفكّر



إذا كان لدينا مكعبٌ حجمه ١٢٥سم^{٣}، فما طول حرفه؟

نبحثُ عن ثلاثة أعداد متساوية حاصل ضربها = ١٢٥

يمكن تحليل العدد ١٢٥ إلى عوامِله الأولية .

١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	

١٢٥ = ٥ × ٥ × ٥

∴ المكعبُ الذى حجمه ١٢٥سم^{٣}، يكون طول حرفه ٥سم.

تسمى ٥ الجذر التكعيبى للعدد ١٢٥ ، وتكتب $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥

الجذرُ التكعيبيُّ للعددِ النسبيِّ أ هو العدد الذى مكعبه يساوى أ

- يرمز للجذرِ التكعيبيِّ للعددِ النسبى أ بالرمز $\sqrt[٣]{أ}$
- الجذرُ التكعيبيُّ لعددٍ نسبيٍّ موجبٍ يكون موجبًا، مثلًا $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥
- الجذرُ التكعيبيُّ لعددٍ نسبيٍّ سالبٍ يكون سالبًا، مثلًا $\sqrt[٣]{-٨}$ = -٢ لماذا؟
- $\sqrt[٣]{صفر}$ = صفر
- $\sqrt[٣]{أ^{٣}}$ = أ

لإيجادِ الجذر التَّكعيبى للعددِ النسبىِّ المكعبِ الكامل:



- يمكن تحليلُ العدد إلى عوامله الأولية.
- يمكن استخدامُ الآلة الحاسبة.

لاحظ أن العددُ النسبيُّ المكعب الكامل له جذرٌ تكعيبيٌّ واحدٌ وهو عددٌ نسبيٌّ أيضًا، لماذا؟

أمثلة

١ استخدم التَّحليلَ لإيجاد قيمة كل من $\sqrt[3]{١٠٠٠}$ ، $\sqrt[3]{-٢١٦}$ ، $\sqrt[3]{٣\frac{٣}{٨}}$ وتحقَّق من صحة إجاباتك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

١٠٠٠	٢	
٥٠٠	٢	٢
٢٥٠	٢	
١٢٥	٥	
٢٥	٥	٥
٥	٥	
١		

$\sqrt[3]{١٠٠٠} = ٢ \times ٥ = ١٠$

٢١٦	٢	
١٠٨	٢	٢
٥٤	٢	
٢٧	٣	
٩	٣	٣
٣	٣	
١		

$\sqrt[3]{-٢١٦} = -٢ \times ٣ = -٦$

$٣\frac{٣}{٨} = \frac{٢٧}{٨}$

٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

$\sqrt[3]{٣\frac{٣}{٨}} = \sqrt[3]{\frac{٢٧}{٨}} = \frac{٣}{٢}$

استخدم الآلةَ الحاسبةَ للتَّحقق من صحة إجابتك باستخدام $\sqrt[3]{\square}$

٢ أوجد طولَ نصف قطر الكرة التى حجمها ٤٨٥١سم^٣ $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$

الحل

٩٢٦١	٣
٣٠٨٧	٣
١٠٢٩	٣
٣٤٣	٧
٤٩	٧
٧	٧
١	

حجم الكرة $= \frac{٤}{٣}\pi$ نق^٣

٤٨٥١ $= \frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧}$ نق^٣

نق^٣ $= \frac{٤٨٥١ \times ٣ \times ٧}{٤ \times ٢٢} = \frac{٩٢٦١}{٨}$

∴ نق^٣ $= \frac{٣^٣ \times ٧^٣}{٢^٣}$

∴ نق $= \sqrt[3]{\frac{٣^٣ \times ٧^٣}{٢^٣}} = ١٠,٥$ سم



حجم الكرة $= \frac{٤}{٣}\pi$ نق^٣ حيث نق طول نصف قطر الكرة، والنسبة التقريبية تسمى π أو ط.

تدرب

أوجد طولَ قطرِ الكرة التى حجمها ١١٣,٠٤سم^{3} ($\pi \simeq$ ٣,١٤)

مثال

حل كلًا من المعادلات الآتية فى ن:

أ س^{3} = ٨

ب س^{3} + ٩ = ٨

جـ (س - ٢)^{3} = ١٢٥

د (٢س - ١)^{3} - ١٠ = ٥٤

الحل

أ س^{3} = ٨

س = $\sqrt[3]{8}$ = ٢

∴ مجموعة الحل = {٢}

ب س^{3} + ٩ = ٨

س^{3} = ٨ - ٩

س^{3} = -١

س = $\sqrt[3]{-1}$ = -١ ∴ مجموعة الحل = {-١}

جـ (س - ٢)^{3} = ١٢٥

س - ٢ = $\sqrt[3]{125}$

س - ٢ = ٥

س = ٧

∴ مجموعة الحل = {٧}

د (٢س - ١)^{3} - ١٠ = ٥٤

(٢س - ١)^{3} = ٦٤

٢س - ١ = $\sqrt[3]{64}$

٢ س - ١ = ٤

٢س = ٥

س = $\frac{5}{2}$ ∴ مجموعة الحل = { $\frac{5}{2}$ }



تدرب

حلّ المعادلاتِ الآتيةَ فى ن: (س + ١)^{3} = ٢٧ ، (س + ١)^{3} = -٢٧



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



مجموعة الأعداد غير النسبية ن'

فكر وناقش

سوف تتعلم

- مجموعة الأعداد غير النسبية.

المصطلحات الأساسية

- عدد غير نسبى.

سبق أن علمت أن: العدد النسبى هو العددُ الذى يمكن وضعُه على الصورة $\frac{أ}{ب}$: حيث أ ∈ ص، ب ∈ ص، ب ≠ ٠

فمثلاً: عند حلِّ المعادلة ٤س^{٢} = ٢٥

فيكون س^{٢} = $\frac{٢٥}{٤}$

∴ س = ± $\frac{٥}{٢}$

ونلاحظ أن كلًّا من $\frac{٥}{٢}$ ، - $\frac{٥}{٢}$ عدد نسبى.

ولكن توجد كثيرٌ من الأعدادِ التى لايمكن وضعُها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ∈ ص، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠.

فمثلاً: عند حلِّ المعادلة س^{٢} = ٢ فإننا لا نستطيع إيجاد عدد نسبى مربعه يساوى ٢

العدد غير النسبى هو العدد الذى لايمكن وضعه على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ∈ ص، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠.

ومن أمثلةِ الأعدادِ غيرِ النسبيَّة:

أولاً: الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التى ليست مربعات كاملة

مثل: $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٥}$ ، -$\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٧}$

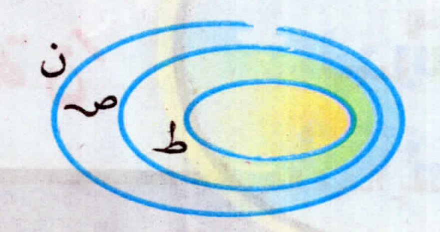
ثانيًا: الجذورَ التكعيبية للأعداد التى ليست مكعبات كاملة

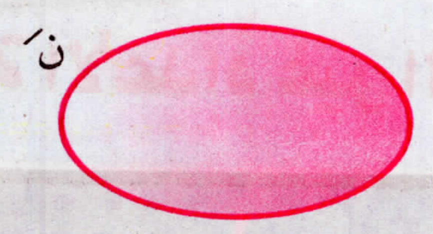
مثل: $\sqrt[٣]{٤}$ ، $\sqrt[٣]{-٢}$ ، $\sqrt[٣]{١١}$ ، ...

ثالثًا: النِّسبةُ التَّقريبية π

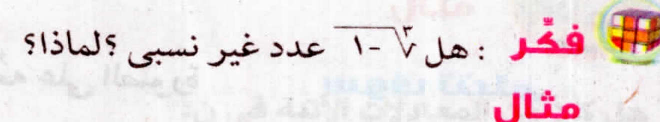
حيث إنه لايمكن إيجاد قيمة مضبوطة لأى من هذه الأعداد. لماذا؟

ومثل هذه الأعداد وغيرها تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد غير النسبية و يرمز لها بالرمز نَ .





ن ∩ نَ = ∅



فكّر : هل $\sqrt[3]{-1}$ عدد غير نسبي ؟لماذا؟

مثال

أكمل باستخدام أحد الرمزين ن أو نَ.

أ $\sqrt[3]{-8}$ ∈ ....

ب $\sqrt{6}$ ∈ ....

ج π ∈ ....

د $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ ∈ ....

هـ صفر ∈ ....

و $\sqrt[3]{-4}$ ∈ ....

ز $\left|\frac{-3}{5}\right|$ ∈ ....

ح 4.7×10^{-5} ∈ ....

ط $\sqrt[3]{-9}$ ∈ ....

ناقش معلمك فى حل المثال السابق



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

الوحدة الأولى
الدرس الثالث

إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى

فكر وناقش

سوف تتعلم

- إيجادُ قيمة تقريبيَّة للعدد غير النسبى.
- تمثيلُ العددِ غير النسبى على خطّ الأعداد.
- حلّ معادلات فى نَ.

هل تستطيعُ إيجاد عددين نسبيين ينحصرُ بينهما العددُ غيرُ النسبى $\sqrt{٢}$

نلاحظ أن $\sqrt{٢}$ ينحصرُ بين $\sqrt{١}$ ، $\sqrt{٤}$ **أى أن** $١ < \sqrt{٢} < ٢$

أى أن $\sqrt{٢} = ١ +$ كسر عشرى .

ولإيجادِ قيمةٍ تقريبيَّة للعدد $\sqrt{٢}$ نفحص قيمَ الأعداد التالية .



$(١,١)^٢ = ١,٢١$ ، $(١,٢)^٢ = ١,٤٤$ ، $(١,٣)^٢ = ١,٦٩$ ،

$(١,٤)^٢ = ١,٩٦$ ، $(١,٥)^٢ = ٢,٢٥$

$\because$ $٢,٢٥ > ٢ > ١,٩٦$

$\therefore$ $١,٥ > \sqrt{٢} > ١,٤$

أى أن $\sqrt{٢} = ١,٤ +$ كسر عشرى

أى أن $١,٤١ < \sqrt{٢} < ١,٤٢$

استخدم الآلةَ الحاسبةَ لتأكيد صحة إجابتك.

تمهيد: (فى الشكل المقابل) المثلث أ ب جـ قائم الزواية فى ب فيكون:

$$(\text{أجـ})^٢ = (\text{أب})^٢ + (\text{ب جـ})^٢$$

وتسمى بنظريه فيثاغورس وستدرس بالتفصيل بمنهج الهندسة

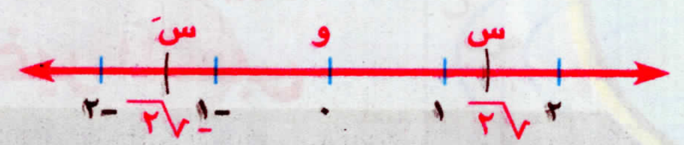
تمثيلُ العددِ غير النّسبى على خطّ الأعداد

كيف نحدِّد النقطةَ التى تمثل العدد $\sqrt{٢}$ على خطِّ الأعداد .



إذا رسمنا المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب،
والمتساوى الساقين بحيث أ ب = ب جـ = وحدة طول واحدة
فإن $(\text{أ جـ})^٢ = (\text{أ ب})^٢ + (\text{ب جـ})^٢ = ١^٢ + ١^٢ = ٢$
$\therefore$ أ جـ $= \sqrt{٢}$ وحدة طول.

- ارسم خطَّ الأعدادِ واركز بسنِّ الفرجار فى نقطة و، وبفتحة تساوى طول $\overline{أجـ}$ ارسم قوسًا يقطع خط الأعداد على يمين و فى نقطة س، وهذه النقطة تمثل العدد $\sqrt{2}$

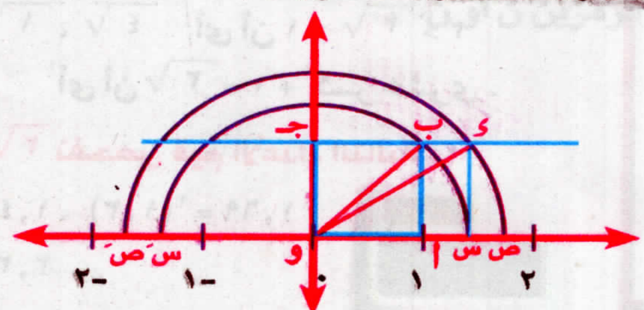


- يمكن بنفس فتحة الفرجار تحديد النقطة سَ التى تمثل العدد $-\sqrt{2}$ حيث سَ على يسار النقطة و

فكّر **حدد النقطةَ التى تمثل العدد ٣ + $\sqrt{2}$ على خط الأعداد .**

نشاط

ارسم المربع و أ ب جـ الذى طول ضلعه وحدة طول.



طول قطره = $\sqrt{1+1}$ = $\sqrt{2}$ وحدة طول.

∴ و ب = $\sqrt{2}$

- اركز بالفرجار فى و ، وارسم نصف دائرة طول نصف قطرها = طول $\overline{و ب}$ = $\sqrt{2}$
- $\overleftrightarrow{و أ}$ ∩ نصف الدائرة = {س ، سَ} ، حيث س تمثل العدد $\sqrt{2}$ ، سَ تمثل $-\sqrt{2}$
- ارسم $\overline{س ى}$ // $\overline{أ ب}$ ويقطع $\overleftrightarrow{جـ ب}$ فى ى

(و ى)^2 = (و س)^2 + (س ى)^2 = $(\sqrt{2})^2 + (1)^2$ = ٣

∴ و ى = $\sqrt{3}$

- اركز بالفرجارِ فى و وبفتحة تساوى طول $\overline{و ى}$ ارسم نصف دائرة يقطع $\overleftrightarrow{و أ}$ فى ص ، صَ

∴ و ص = $\sqrt{3}$ **أى أن** النقطةَ ص تمثل العدد $\sqrt{3}$ ، والنقطة صَ تمثل العدد $-\sqrt{3}$

أكمل بنفس الطريقة لتمثيل الأعداد $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، ... وكذلك $-\sqrt{4}$ ، $-\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{6}$ ، ...


تدرب :

١ أوجد :

أ عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{5}$

ب عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{12}$

جـ عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt[3]{10}$

د عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt[3]{-20}$

٢ **اثبت أن**

أ $\sqrt{3}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨   **ب** $\sqrt[3]{15}$ ينحصر بين ٢,٤ ، ٢,٥

٣ أوجد لأقرب جزء من مائة قيمة $\sqrt{11}$

٤ أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt[3]{2}$

٥ ارسم خطَّ الأعدادِ وحدِّد عليه النقطةَ التى تمثِّل العددَ غير النسبى $\sqrt{3}$

٦ ارسم خطَّ الأعدادِ وحدِّد عليه النقطة التى تمثل العدد غير النسبى $1 + \sqrt{2}$



أوجد مجموعةَ حلِّ كلٍّ من المعادلات الآتية فى ن:

أ $س^2 = 2$ **ب** $س^3 = 5$ **جـ** $\frac{4}{3} س^2 = 1$ **د** $0,001 س^3 = -8$

الحل

أ $س^2 = 2$

$\therefore س = \pm \sqrt{2}$ مجموعة الحل = $\{-\sqrt{2} ، \sqrt{2}\}$

ب $س^3 = 5$

$\therefore س = \sqrt[3]{5}$ مجموعة الحل = $\{\sqrt[3]{5}\}$

جـ $\frac{4}{3} س^2 = 1$

$\therefore \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} س^2 = \frac{3}{4} \times 1$

$س^2 = \frac{3}{4}$

$\therefore س = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ مجموعة الحل = $\{-\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

د $0,001 س^3 = -8$

$س^3 = -\frac{8}{0,001} = -8000$

$\therefore س = \sqrt[3]{-8000}$

$= -20 \notin ن$

مجموعة الحل المعادلة فى ن = $\emptyset$







أوجد كلًا من طولِ ضلع وطول قطر مربع مساحته ٧ سم^{٢}.

الحل

إذا كان طولُ الضلع س سم فإن المساحة = س × س = س^{٢}

س^{٢} = ٧

∴ س = ± $\sqrt{٧}$ سم ∴ س = $\sqrt{٧}$ سم لماذا؟

لإيجادِ طول قطر المربع: استخدم نظريةَ فيثاغورس

ل^{٢} = س^{٢} + س^{٢} ، حيث ل طول قطر المربع

∴ ل^{٢} = ١٤

∴ ل = ± $\sqrt{١٤}$ ∴ ل = $\sqrt{١٤}$ سم لماذا؟



دائرة مساحة سطحها ٣π سم^{٢} أوجد محيطها.

الحل

مساحة سطح الدائرة = π نق^{٢}

٣π = π نق^{٢}

∴ نق^{٢} = ٣

نق = $\sqrt{٣}$ سم أو نق = - $\sqrt{٣}$ سم (مرفوض)

محيط الدائرة = ٢π نق = ٢ π × $\sqrt{٣}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ π سم.



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



مجموعة الأعداد الحقيقية ح

فكر وناقش

سبق أن درسنا مجموعةَ الأعدادِ النسبيَّة ن، ووجدنا أن هناك أعدادًا أخرى مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[3]{2}$ ، π، ... وهذه الأعدادُ تكون مجموعة الأعداد غير النسبية نَ

اتحاد المجموعتين ن، نَ يعطى مجموعةً جديدةً تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية ، ويرمز لها بالرمز ح.

ح = ن ∪ نَ

تأمَّل شكلَ فى المقابل تجد أن:

مجموعة الأعداد غير النسبية نَ	مجموعة الأعداد النسبية ن: مجموعة الأعداد الصحيحة صـ: مجموعة الأعداد الطبيعية ط

١ ن ∩ نَ = ∅

٢ أى عدد طبيعى أو صحيح أو نسبى أو غير نسبى هو عدد حقيقى.

ط ⊂ صـ ⊂ ن ⊂ ح وكذلك نَ ⊂ ح

فكّر :أعط أمثلةً من عندك لأعداد حقيقيَّة بعضها نسبى وبعضها غير نسبى.

٣ كلُّ عددٍ حقيقىٍّ تمثله نقطةٌ واحدةٌ على خطِّ الأعداد .

الأعداد حقيقية موجبة | و | الأعداد الحقيقية السالبة

أولاً: العددُ صفر تمثله نقطة الأصل و.

ثانيًا: الأعدادُ الحقيقيةُ الموجبُة تمثلها جميعُ نقط خطِّ الأعداد على يمين و

ثالثًا: الأعدادُ الحقيقيةُ السالبة تمثلها جميعُ نقط خطِّ الأعداد على يسار و

سوف تتعلم

- مجموعة الأعداد الحقيقية ح.
- العَلاقة بين مجموعات الأعداد ط، صـ، ن، نَ ، ح.

المصطلحات الأساسية

- عدد حقيقى.

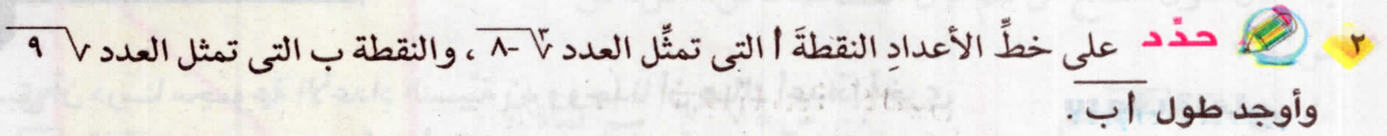
تدرب

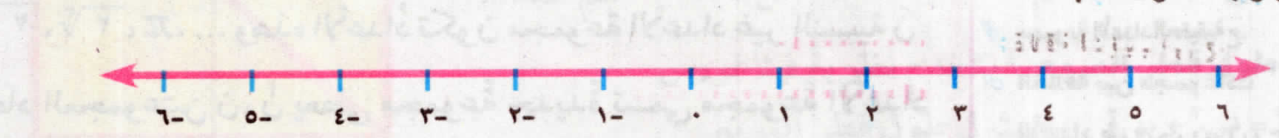
ح
ن
ص
ط
نَ

١ **ضع** كلًّا من الأعدادِ الآتية فى مكانها المناسب على شكل ڤن المقابل.

$\frac{١}{٢}$ ، -٤ ، ٩ ، $\sqrt{٥}$ ، ٠,٦ ، $\frac{٧}{٩}$ ، $\sqrt[٣]{-٢}$ ، $\sqrt{١٦}$ ، ٠ ، ٥

٢ **حدِّد** على خطِّ الأعدادِ النقطةَ أ التى تمثِّل العدد $\sqrt[٣]{-٨}$ ، والنقطة ب التى تمثل العدد $\sqrt{٩}$ وأوجد طول $\overline{أب}$.





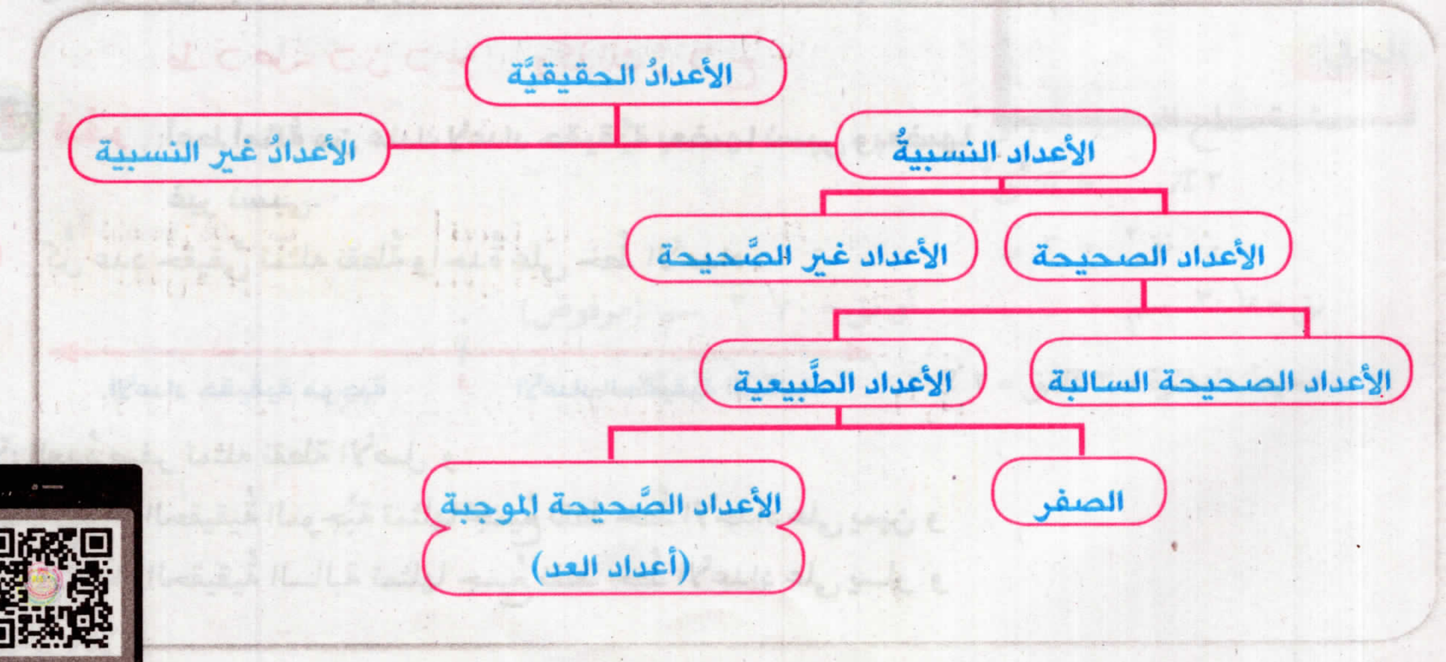
٣ وضِّح صحةَ أو خطأ كل من العبارتين:

أ كل عدد طبيعى هو عدد حقيقى موجب.

ب كل عدد صحيح هو عدد حقيقى.

لاحظ أن: $\sqrt[٣]{-١}$ = -١ لأن -١ × -١ × -١ = -١

بينما $\sqrt{-١}$ ∉ ح لأنه لايوجد عدد حقيقى إذا ضرب فى نفسه يعطى -١.



Scan me!

ناقش مع معلمك/معلمتك و زملائك: هل توجد أعدادٌ غيرُ حقيقية ؟

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



علاقة الترتيبِ فى ح

فكر وناقش

إذا كانت أ، ب نقطتين تنتميان للمستقيم ل، وحدَّدنا اتجاهًا معينًا كالمبين بالسهم فإنه يمكن القول إن:

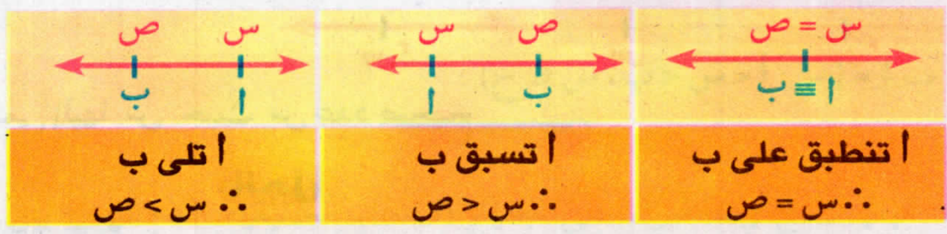
- النقطة ب تلى النقطة أ، أى تكون على يمينها.
- النقطة أ تسبق النقطة ب، أى تكون على يسارها.

وهكذا بالنسبة لجميع نقاط الخط المستقيم، فإذا علمنا أن كل نقطة من نقط الخط المستقيم تمثل عددًا حقيقيًّا فإننا نقول إن:

مجموعة الأعداد الحقيقية هى مجموعة مرتبة

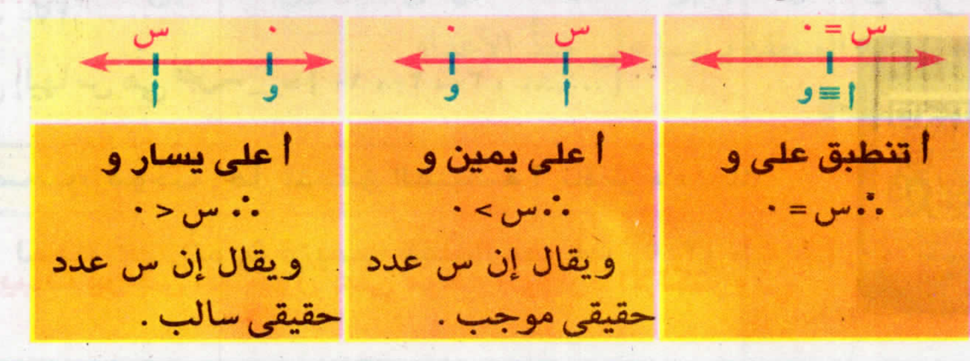
خواصُ الترتيبِ:

١ إذا كان س، ص عددين حقيقيين يمثلهما على خطِّ الأعدادِ النقطتان أ، ب على التَّرتيب فإنه توجد إحدى الحالات الثلاثة الآتية:



أ تنطبق على ب ∴ س = ص	أ تسبق ب ∴ س < ص	أ تلى ب ∴ س > ص

٢ إذا كانت س عددًا حقيقيًّا تمثله النقطةُ أ على خطِّ الأعداد، وكانت و هى نقطة الأصل التى تمثِّل العدد صفر فإنه توجد إحدى الحالات الثلاثة الآتية:



أ تنطبق على و ∴ س = ٠	أ على يمين و ∴ س > ٠ ويقال إن س عدد حقيقى موجب.	أ على يسار و ∴ س < ٠ ويقال إن س عدد حقيقى سالب.

سوف تتعلم

- علاقة الترتيب فى ح.

المصطلحات الأساسية

- علاقة ترتيب.
- أكبر من.
- أصغر من.
- تساوى.
- ترتيب تصاعدى.
- ترتيب تنازلى.

$ح_-$ ، $ح_+$

و

أعداد حقيقية موجبة ، إعداد حقيقية سالبة

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة الموجبة: $ح_+ = \{س : س \in ح ، س > ٠\}$

مجموعة الأعدادِ الحقيقيَّة السالبة: $ح_- = \{س : س \in ح ، س < ٠\}$

$$ح = ح_+ \cup \{٠\} \cup ح_-$$

لاحظ أن: مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة غير السالبة $= ح_+ \cup \{٠\} = \{س : س \geqslant ٠ ، س \in ح\}$

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة غير الموجبة $= ح_- \cup \{٠\} = \{س : س \leqslant ٠ ، س \in ح\}$



مثال (١)

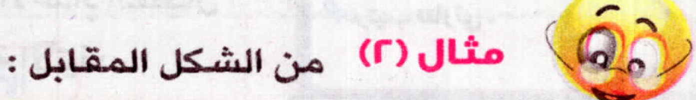
رتِّب الأعدادَ الآتيَة تصاعديًا $\sqrt{٢٧}$ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، ٦ ، ٠ ، $\sqrt[٣]{-١}$

الحل

$٦ = \sqrt{٣٦}$ ، $\sqrt[٣]{-١} = -١ = -\sqrt{١}$

الترتيبُ التصاعديُّ من الأصغرِ إلى الأكبر $-\sqrt{٤٥}$ ، $-\sqrt{١}$ ، ٠ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{٣٦}$

أى $-\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt[٣]{-١}$ ، ٠ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، ٦





مثال (٢) **من الشكل المقابل :**



أوجد مجموعة الأعداد التى تنتمى إليها س حيث س عدد صحيح

الحل

من الشكل نلاحظ أن : $س^٢ > س > س^٣$

فعند اختيار س عدد صحيح سالب يحقق المتباينة السابقة

مثل : $س = -٣ \Longleftarrow ٩ > -٣ > -٢٧$

∴ مجموعه الأعداد التى تنتمى إليها س هى $ص_- = \{ -١ ، -٢ ، -٣ ، ...... \}$

اختر س عدد صحيح موجب . هل تتحقق المتباينة ؟ ناقش معلمك



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الفترات

فكر وناقش

الفترة هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

أولاً: الفتراتُ المحدودة

إذا كان أ ، ب ∈ ح ، أ < ب فإننا نعرف كلًّا من:

الفترة المغلقة [أ ، ب]

[أ، ب] = {س : أ ≤ س ≤ ب ، س ∈ ح}

أ ب

[أ، ب] ⊂ ح وعناصرها أ، ب وجميع الأعداد الحقيقية بينهما
توضع دائرة مظللة عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين أ، ب وتظلل المنطقة بينهما على خط الأعداد .

الفترة المفتوحة]أ، ب[

]أ، ب [= {س: أ < س < ب، س ∈ ح}

أ ب

]أ ، ب[⊂ ح وعناصرها هى جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين أ ، ب .
توضع دائرة مفتوحة (غير مظللة) عند كل من النقطتين الممثلتين للعددين أ، ب وتظلل المنطقة بينهما على خطِّ الأعداد

تدرب

اكتب كلًّا من [٣، ٥]،]٣، ٥[بطريقةِ الصِّفة المميزة ثم مثِّل كلًّا منهما على خط الأعداد.

سوف تتعلم

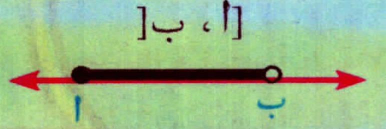
- الفترات المحدودة.
- الفترات غير المحدودة.
- العمليات على الفترات .

المصطلحات الأساسية

- فترة محدودة .
- فترة مغلقة .
- فترة مفتوحة .
- فترة نصف مفتوحة .
- فترة غير محدودة .
- اتحاد .
- تقاطع .
- فرق .
- مكملة .

الفترات نصف المفتوحة أو (نصف المغلقة)

[أ ، ب[



[أ ، ب[= {س : أ ≥ س > ب ، س ∈ ح}

[أ ، ب[⊂ ح عناصرها العدد أ وجميع الأعداد المحصورة بين أ ، ب .

]أ ، ب]

أ ب

]أ ، ب] = {س : أ > س ≥ ب ، س ∈ ح}

]أ ، ب] ⊂ ح عناصرها العدد ب وجميع الأعداد المحصورة بين أ ، ب .



تدرب

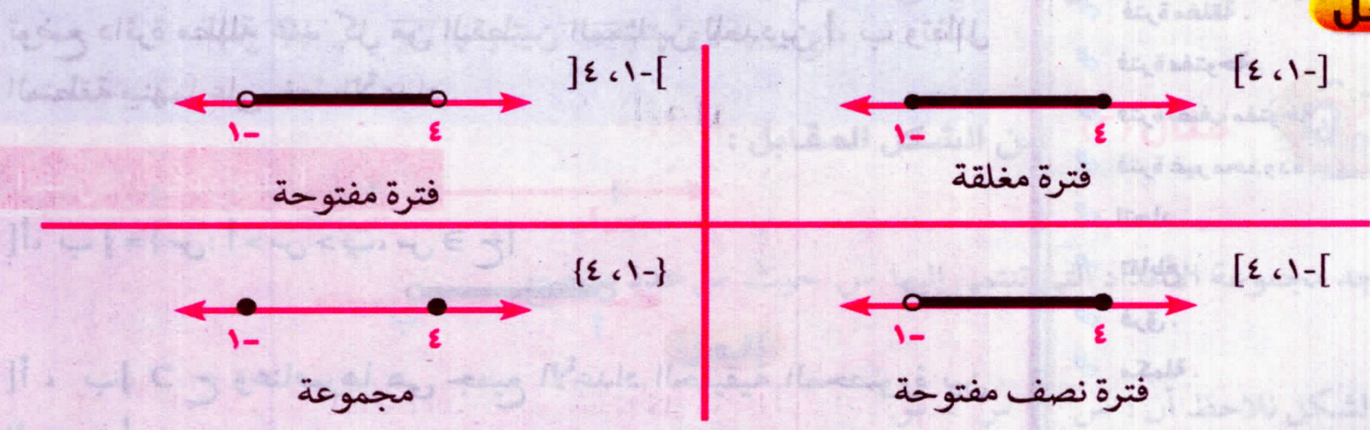
اكتب كلًا من الفترتين [٣ ، ٥[،]٣، ٥] بطريقةِ الصِّفة المميزة ، و مثل كلًا منهما على خطِّ الأعداد.



مثال (١)

مثِّل بيانيًا على خطِّ الأعداد كلًّا من: [-١، ٤] ،]-١، ٤[،]-١، ٤]، {-١، ٤}

الحل



ناقِشْ مع معلمك / معلمتك و زملائك: هل الفترةُ مجموعةٌ منتهيةٌ أم غيرُ منتهيةٍ؟

مثال (٢)

١ **اكتب** على صورةِ فترة، كلًّا من المجموعاتِ الآتية، ومثِّل كلًّا منها على خطِّ الأعداد:

أ س = {س : ٢ < س < ٥ ، س ∈ ح}
ب س = {س : -٢ ⩽ س < ٣ ، س ∈ ح}
جـ س = {س : ٠ ⩽ س ⩽ ٤، س ∈ ح}
د س = {س : -٣ < س ⩽ -١ ، س ∈ ح}

الحل

أ س =]٢، ٥[(٢ ، ٥)
ب س = [-٢، ٣[(-٢ ، ٣)
جـ س = [٠، ٤] (٠ ، ٤)
د س =]-٣، -١] (-٣ ، -١)

٢ **ضع** الرمزَ المناسبَ ∈ أو ∉ لتكون العبارة صحيحة:

أ ٣ .... [-١، ٣[
ب -٢ ....]-١، ٣[
جـ $\frac{1}{2}$ ....]٠، ١[
د $\sqrt{2}$ .... [١، ٢]
هـ ٤ ....]٠، ٥[
و $\sqrt[3]{-8}$ .... [-١، ٢]
ز |-٥| .... [٤، ٦]
ح ٢،٣ × ١٠^-٥ ....]٠، ١[

الحل

أ ∉ ب ∉ جـ ∈ د ∈
هـ ∈ و ∉ ز ∈ ح ∈

٣ **اكتب** الفترةَ التى يعبِّر عنها كلٌّ من الأشكالِ الآتية:



الحل

أ [٠، ٣]
ب]-٤، ١]
جـ [-٣، -١[
د]٠، ٦[

ثانيًا: الفتراتُ غيرُ المحدودة

تعلم أن: خط الأعداد الحقيقيّة مهما امتد من جهتيه فإنه يوجد أعداد حقيقية موجبة من جهة اليمين وسالبة من جهة اليسار تقع على هذا الخط.

- الرمز (∞) ويقرأ (لانهاية) و هو أكبر من أى عددٍ حقيقيٍّ يمكن تصورُه ، ∞ ∌ ح
- الرمز (-∞) و يقرأ (سالب لانهاية) و هو أصغرُ من أى عددٍ حقيقيٍّ يمكن تصوره ، -∞ ∌ ح
- الرمزان ∞ ، -∞ لاتوجد نقط تمثلهما على خطِّ الأعداد الحقيقية، وهما امتداد لخط الأعداد من جهتيه.



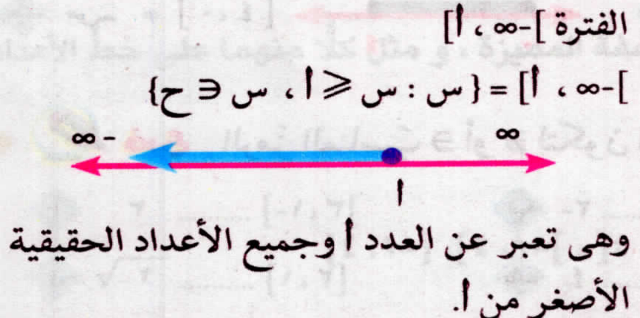
وإذا كان أ عددًا حقيقيًا فإننا نعرفُ الفتراتِ غيرَ المحدودة التالية:

الفترة [أ ، ∞[

[أ، ∞[= {س : س ⩾ أ ، س ∈ ح}

-∞ ∞ أ

وهى تعبِّر عن العددِ أ وجميع الأعداد الحقيقيَّة أكبر من أ.



الفترة]-∞ ، أ]

]-∞ ، أ] = {س : س ⩽ أ ، س ∈ ح}

-∞ ∞ أ

وهى تعبر عن العدد أ وجميع الأعداد الحقيقية الأصغر من أ.



اكتب كلًّا من الفترتين [٣، ∞[،]-∞، ٣] بطريقةِ الصِّفة المميزة، ثم مثلهما على خطِّ الأعداد.

الفترة]أ، ∞[

]أ، ∞[= {س : س > أ ، س ∈ ح}

-∞ ∞ أ

وهى تعبِّر عن جمِيع الأعـداد الحقيقية الأكبر من أ

الفترة]-∞ ، أ[

]-∞ ، أ[= {س : س < أ ، س ∈ ح}

-∞ ∞ أ

وهى تعبِّر عن جميع الأعـداد الحقيقية الأصغر من أ



اكتب الفترتين]٣، ∞[،]-∞، ٣[بطريقةِ الصفة المميزة، ثم مثلهما على خطِّ الأعداد.

لاحظ أن: مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة ح يمكن التعبيرُ عنها على صورة الفترة]-∞ ، ∞[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة الموجبة $ح_+$ =]٠، ∞[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة السالبة $ح_-$ =]-∞، ٠[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة غير السالبة = [٠، ∞[

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة غير الموجبة =]-∞ ، ٠]

تدرب

١ اكتب على صورة فترة كلًّا من المجموعات الآتية، ومثِّلها على خطِّ الأعداد .

أ س = {س : س ⩾ ٢ ، س ∈ ح}

ب س = {س : س < ٣ ، س ∈ ح}

جـ س = {س : س > -٧ ، س ∈ ح}

د س = {س : س ⩾ $\sqrt[3]{-8}$ ، س ∈ ح}

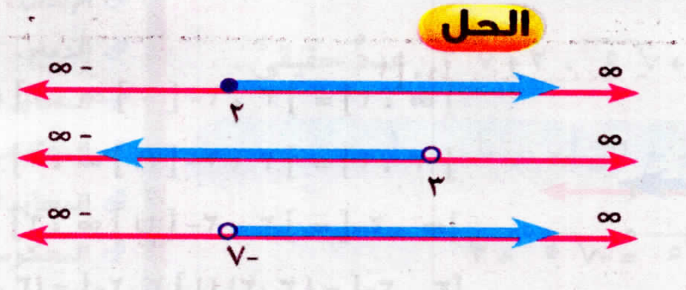
هـ مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من | -٣ |

الحل

أ س = [٢، ∞[

ب س =]-∞، ٣[

جـ س =]-٧، ∞[



أكمل الحل

٢ ضع الرمزَ المناسبَ ∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄ لتكون العبارة صحيحة:

أ ٣ ....]-∞، ٤[ب [١ ، ٢] ....]-١، ∞[

جـ -٥ ....]-∞، -٦[د]٠ ، ٢[............]٠، ∞[

هـ ٣ × ١٠^١٠ ....]٣، ∞[و [-٣، ١] .... [٢، ∞[

الحل

أ ∈ ب ⊂ جـ ∉ د ⊂ هـ ∈ و ⊄

العملياتُ على الفترات

حيث إن الفترات هى مجموعاتٌ جزئيةٌ من مجموعةِ الأعداد الحقيقية ح، فإنه يمكن إجراءُ عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق والمكملة على الفترات، ويمكَن الاستعانةُ بالتمثيلِ البيانيِّ للفترات على خطِّ الأعدادَ ؛ لتحديد وتوضيح ناتج العملية و يتضحُ ذلك من الأمثلة التالية:



أمثلة

١ إذا كانت س = [−٢، ٣] ، ص = [١، ٥[فأوجد مستعينًا بخطِّ الأعداد كلًّا من :

أ س ∩ ص　　　ب س ∪ ص

الحل

أ س ∩ ص = [−٢، ٣] ∩ [١، ٥[= [١، ٣]

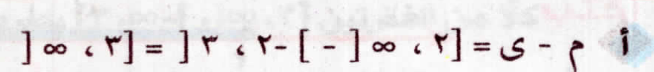
ب س ∪ ص = [−٢، ٣] ∪ [١، ٥[= [−٢، ٥[

٢ إذا كانت م = [٢، ∞[، ى =]−٢، ٣] فأوجد مستعينًا بخطِّ الأعداد كلًّا من :

أ م − ى　　　ب م ∩ ى　　　جـ م ∪ ى

د ى ∪ {٢، ٣}　　　هـ مَ　　　و ىَ

الحل



أ م − ى = [٢، ∞[−]−٢، ٣] =]٣، ∞[

ب م ∩ ى = [٢، ∞[∩]−٢، ٣] = [٢، ٣]

جـ م ∪ ى = [٢، ∞[∪]−٢، ٣] =]−٢، ∞[

د ى ∪ {٢، ٣} =]−٢، ٣] ∪ {٢، ٣} =]−٢، ٣]

هـ مَ =]−∞، ٢[　　　و ىَ =]−∞، −٢] ∪]٣، ∞[



تدرب



ضَعْ علامة (✓) أمام العبارة الصَّحيحة وعلامةَ (✗) أمام العبارة الخطأ:

أ [−٢، ٥] − {٢، ٥} =]−٢، ٥[

ب]−١، ٣] ∪ {−١، ٠} = [−١، ٠]

جـ [٢، ٥] − {٥} = [٢، ٥[

د [−١، ٣] ∩]١، ٤[= [١، ٣]

هـ [−٢، ٥[∪ {١، ٥} = [−٢، ٥]

و [٥، ∞[−]−∞، ٥] =]٥، ∞[



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني





العمليات على الأعداد الحقيقية

فكر وناقش

أولاً: خواصُ جمعِ الأعدادِ الحقيقيّة

سبق أن حدَّدنا موضعَ النقطةَ س التى تمثل العدد $١ + \sqrt{٢}$ على خطِّ الأعداد، وحيث إنه يمثلُ مجموعَ العددين الحقيقيين ١ ، $\sqrt{٢}$ فإن مجموعَ كلِّ عددينِ حقيقيين هو عددٌ حقيقى .



أى أن مجموعةَ الأعدادِ الحقيقية ح مغلقةٌ تحت عمليّة الجمع .

الانغلاق إذا كانت أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن (أ + ب) ∈ ح

فمثلاً: كل من ٢ + ٣ ، $١ + \sqrt{٢}$ ، $-٢ + \sqrt{٥}$ ، $٢ + \sqrt[٣]{٣}$ عددٌ حقيقيٌّ .

الإبدال إذا كانت أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ + ب = ب + أ

فمثلاً: $٢ + \sqrt{٣} = \sqrt{٣} + ٢$ ، $٣ - \sqrt{٥} = -\sqrt{٥} + ٣$

الدمج إذا كانت أ ∈ ح ، ب ∈ ح ، جـ ∈ ح
فإن (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) = أ + ب + جـ

فمثلاً:

$(٣ + \sqrt{٢}) + ٥ = ٣ + (\sqrt{٢} + ٥)$	**خاصية الدمج**
$= ٣ + (٥ + \sqrt{٢})$	**خاصية الإبدال**
$= (٣ + ٥) + \sqrt{٢}$	**خاصية الدمج**
$= ٨ + \sqrt{٢}$	

سوف تتعلم

- العمليات على الأعداد الحقيقية .
- خواصُّ العملياتِ على الأعداد الحقيقية .

المصطلحات الأساسية

- الانغلاق .
- الإبدال .
- الدمج .
- المحايد الجمعى .
- المعكوس الجمعى .
- المحايد الضربى .
- المعكوس الضربى .
- توزيع الضرب على الجمع أو الطرح .

الصفر هو العنصر المحايد الجمعى إذا كان أ ∈ ح فإن أ + ٠ = ٠ + أ = أ

فمثلاً: $\sqrt{٥}$ + ٠ = ٠ + $\sqrt{٥}$ = $\sqrt{٥}$ ، -$\sqrt[٣]{٤}$ + ٠ = ٠ + (-$\sqrt[٣]{٤}$) = -$\sqrt[٣]{٤}$

وجود معكوس جمعى لكل عدد حقيقى لكل أ ∈ ح يوجد (-أ) ∈ ح
حيث أ + (-أ) = (-أ) + أ = صفرًا

فمثلاً: $\sqrt{٣}$ ∈ ح ، معكوسه الجمعى (-$\sqrt{٣}$) ∈ ح حيث
$\sqrt{٣}$ + (-$\sqrt{٣}$) = (-$\sqrt{٣}$) + $\sqrt{٣}$ = صفرًا.



١ **أكمل لتحصلَ على عبارةٍ صحيحةٍ:**

أ $\sqrt{٢}$ + ٥ = ٥ + ...

ب $\sqrt{١١}$ + (-$\sqrt{١١}$) = ...

جـ ٧ + $\sqrt{٣}$ = ٥ + (.............. + ...)

د المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt[٣]{٨}$ هو ....

هـ المعكوس الجمعى للعدد (١ - $\sqrt{٢}$) هو ....

و $\sqrt{٣}$ + (-$\sqrt{٣}$) = ...

ز ٧ + $\sqrt{٥}$ - ٣ = ...

ح (٤ + $\sqrt{٧}$) + (٣ - $\sqrt{٧}$) = ...

ط إذا كانت أ ∈ ح، ب ∈ ح فإن أ - ب تعنى ناتج جمع العدد أ و .... للعدد ب.

ى إذا كانت أ ∈ ط، ب ∈ ن ، جـ ∈ ح فإن (أ + ب + جـ) ∈ ....

٢ **ناقِش مع معلمك / معلمتك و زملائك: موضحًا بأمثلة:**

أ هل عمليَّةُ الطرح إبداليَّة فى ح؟

ب هل عمليَّةُ الطرِح دامجةٌ فى ح؟

ثانيًا: خواصّ ضربِ الأعدادِ الحقيقية:

الانغلاق إذا كانت أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ × ب ∈ ح

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّة مغلقةٌ تحت عملية الضرب.

أى أن حاصل ضرب كل عددين حقيقيين هو عدد حقيقى.

مثلاً: $٥ \times \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢} \in$ ح ، $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣ \in$ ح

$-٢ \times \sqrt[٣]{٥} = -٢\sqrt[٣]{٥} \in$ ح ، $\frac{٢}{٣} \times \pi = \frac{٢}{٣}\pi \in$ ح

$٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٦ \in$ ح ، $٢\sqrt{٣} \times ٥ = ١٠\sqrt{٣} \in$ ح

الإبدال لكلِّ عددين حقيقيين أ ، ب يكون أ × ب = ب × أ

مثلاً: $\sqrt{٢} \times ٣ = ٣ \times \sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$

الدمج لكلِّ ثلاثةِ أعدادٍ حقيقية أ ، ب ، جـ يكون
(أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ) = أ × ب × جـ

مثلاً: $\sqrt{٢} \times (٥ \times \sqrt{٢}) = (\sqrt{٢} \times ٥) \times \sqrt{٢} = (٥ \times \sqrt{٢}) \times \sqrt{٢}$

$= ٥ \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٥ \times ٢ = ١٠$

الواحد هو العنصرُ المحايدُ الضّربى لكلِّ عددٍ حقيقىٍّ أ يكون أ × ١ = ١ × أ = أ

مثلاً: $٢\sqrt{٥} \times ١ = ١ \times ٢\sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$

وجود معكوسٍ ضربىٍّ لكلِّ عدد حقيقى ≠ ٠ لكل عدد حقيقى أ ≠ صفر
يوجد عدد حقيقى $\frac{١}{أ}$
حيث أ × $\frac{١}{أ}$ = $\frac{١}{أ}$ × أ = ١ **(المحايد الضربى)**

مثلاً: المعكوسُ الضربىُّ للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هو $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ حيث $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١$

لاحظ أن: $\frac{أ}{ب} = أ \times \frac{١}{ب}$ ، ب ≠ ٠

أى أن $\frac{أ}{ب}$ = أ × المعكوس الضربى للعدد ب.

ناقش مع معلمك / معلمتك: هل عملية القسمة إبدالية فى ح؟ هل عملية القسمة دامجة فى ح؟

مثال

اكتب كلًّا من الأعدادِ $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-٥}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١٥}{٢\sqrt{٥}}$ بحيث يكون المقامُ عددًا صحيحًا.

الحل

لاحظ أن المحايد الضربى ١ يمكن كتابته بالصورة $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ أو $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ أو $\frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ أو ...

$$\frac{٦}{\sqrt{٢}} = \frac{٦}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٦\sqrt{٢}}{٢} = \frac{٣\sqrt{٢}}{١} = ٣\sqrt{٢}$$

$$-\frac{٥}{\sqrt{٣}} = \frac{-٥}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = -\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$$

$$\frac{١٥}{٢\sqrt{٥}} = \frac{١٥}{٢\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{١٥\sqrt{٥}}{٢ \times ٥} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$$

تدرب

١ أكمل لتحصلَ على عبارةٍ صحيحة:

أ $\sqrt{٢} + \sqrt{٢} + \sqrt{٢} = \ldots\ldots \times \sqrt{٢} = \ldots\ldots$

ب $٣ \times \sqrt{٥} = \sqrt{٥} \times \ldots\ldots$

جـ $\sqrt{٧} \times \sqrt{٧} = \ldots\ldots$

د $٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٥} = \ldots\ldots$

هـ المحايد الضربى فى ح هو العدد ....

و المعكوس الضربى للعدد $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ هو ....

٢ اكتب كلًّا من الأعدادِ الآتية بحيث يكون المقامُ عددًا صحيحًا:

أ $\frac{١٥}{\sqrt{٦}}$ ب $\frac{٨}{٣\sqrt{٢}} =$

جـ $-\frac{٦}{\sqrt{٣}}$ د $\frac{٢٥}{٢\sqrt{١٠}}$

توزيع الضرب على الجمع

لأى ثلاثة أعدادٍ حقيقية أ ، ب ، جـ يكون.

أ × (ب + جـ) = (أ × ب) + (أ × جـ) = أب + أجـ

(أ + ب) × جـ = (أ × جـ) + (ب × جـ) = أجـ + ب جـ



أمثلة

١ اختصر إلى أبسط صورة .

أ $٢\sqrt{٥}\,(٣ + \sqrt{٥})$ **ب** $(\sqrt{٢} + ٥)\,(٣ + \sqrt{٢})$

جـ $(٢ - ٣\sqrt{٥})^{٢}$

الحل

أ $٢\sqrt{٥}\,(٣ + \sqrt{٥}) = ٢\sqrt{٥} \times ٣ + ٢\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}$

$= ٢ \times ٣ \times \sqrt{٥} + ٢ \times ٥ = ٦\sqrt{٥} + ١٠$

ب $(\sqrt{٢} + ٥)\,(٣ + \sqrt{٢}) = \sqrt{٢}\,(٣ + \sqrt{٢}) + ٥\,(٣ + \sqrt{٢})$

$= \sqrt{٢} \times ٣ + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} + ٥ \times ٣ + ٥ \times \sqrt{٢}$

$= ٣\sqrt{٢} + ٢ + ١٥ + ٥\sqrt{٢}$

$= ٣\sqrt{٢} + ١٧ + ٥\sqrt{٢} = ٨\sqrt{٢} + ١٧$

جـ $(٢ - ٣\sqrt{٥})^{٢} = (٢)^{٢} + ٢ \times ٢ \times -٣\sqrt{٥} + (-٣\sqrt{٥})^{٢}$

$= ٤ - ١٢\sqrt{٥} + ٩ \times ٥$

$= ٤٩ - ١٢\sqrt{٥}$

٢ أعط تقديرًا لناتج $(٣ + \sqrt{٥}) \times (١ + \sqrt{٨})$ و تحقَّق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

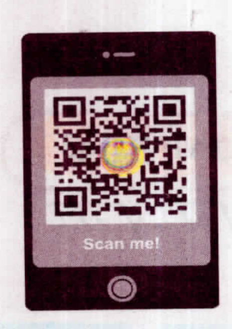
أولاً: تقدير $\sqrt{٥}$ هو ٢ $\therefore (٣ + \sqrt{٥})$ تقديرها هو $٣ + ٢ = ٥$

تقدير $\sqrt{٨}$ هو ٣ $\therefore (١ + \sqrt{٨})$ تقديرها هو $١ + ٣ = ٤$

$\therefore (٣ + \sqrt{٥})(١ + \sqrt{٨})$ تقديرها هو $٥ \times ٤ = ٢٠$

ثانيًا: عند استخدامِ الآلة الحاسبة لحساب $(٣ + \sqrt{٥}) \times (١ + \sqrt{٨})$

نجد أن الناتج ٢٠,٠٤٥٩ أى أن التقدير مقبولٌ.



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الوحدة الأولى

الدرس الثامن

العمليات على الجذور التربيعية

فكّر وناقش

سوف تتعلم

- إجراءُ العمليات على الجذور التربيعية .
- ضرب عددين مترافقين.

المصطلحات الأساسية

- جذر تربيعي .
- عدد ان مترافقان .

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

أولاً: $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$

فمثلاً: $\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٢ \times ٣} = \sqrt{٦}$

$\sqrt{٢} \times \sqrt{١٠} = \sqrt{٢ \times ١٠} = \sqrt{٢٠}$

$\sqrt{١٥} \times \sqrt{٥} = \sqrt{١٥ \times ٥} = \sqrt{٧٥}$

$\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$

فمثلاً: $\sqrt{٢٠} = \sqrt{٤ \times ٥} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$

$\sqrt{٧٥} = \sqrt{٢٥ \times ٣} = \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٣} = ٥\sqrt{٣}$

ثانيًا: $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ حيث ب ≠ ٠

فمثلاً: $\sqrt{\frac{٥}{٩}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٩}} = \frac{١}{٣}\sqrt{٥}$

$\sqrt{\frac{١٦}{٣}} = \frac{\sqrt{١٦}}{\sqrt{٣}} = \frac{٤}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$

ثالثًا: $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} \times \frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أب}}{ب}$ ب ≠ ٠

فمثلاً: $\frac{\sqrt{١٨}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{١٨}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣$

$\frac{\sqrt{٨٤}}{\sqrt{٧}} = \sqrt{\frac{٨٤}{٧}} = \sqrt{١٢} = \sqrt{٤ \times ٣} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

أمثلة

١ اختصر لأبسطِ صورةٍ $\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}}$

الحل

$\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١٦ \times ٢} - \sqrt{٣٦ \times ٢} + ٦ \times \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٢}}$

$= \sqrt{١٦} \times \sqrt{٢} - \sqrt{٣٦} \times \sqrt{٢} + ٦ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$= ٤\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$

٢ إذا كان س $= ٢\sqrt{٥} - ١$ ، ص $= ٢ + \sqrt{٥}$ أوجد قيمة المقدار س^٢ + ص^٢

الحل

س^٢ $= (٢\sqrt{٥} - ١)^٢ = (٢\sqrt{٥})^٢ - ٤\sqrt{٥} + ١$

$= ٤ \times ٥ - ٤\sqrt{٥} + ١ = ٢١ - ٤\sqrt{٥}$

ص^٢ $= (٢ + \sqrt{٥})^٢ = ٤ + ٤\sqrt{٥} + ٥ = ٩ + ٤\sqrt{٥}$

س^٢+ص^٢ $= ٢١ - ٤\sqrt{٥} + ٩ + ٤\sqrt{٥} = ٣٠$

تدرب

١ ضع كلًّا ممايأتى على صورة أ$\sqrt{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة :

أ $\sqrt{٢٨}$ ب $\sqrt{٧٥}$ جـ $\sqrt{٥٤}$

د $\sqrt{١٠٠٠}$ هـ $٢\sqrt{٧٢}$ و $\frac{١}{٣}\sqrt{١٦٢}$

٢ اختصر إلى أبسط صورة:

أ $٢\sqrt{١٨} \times ٣\sqrt{٢}$ ب $\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{١٠}$ جـ $٣\sqrt{٧} \times ٢\sqrt{٢٨}$

د $\sqrt{٥٠} + \sqrt{٨}$ هـ $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٤٥}$ و $\sqrt{٢٧} + ٥\sqrt{١٨} - \sqrt{٣٠٠}$

٢ **أوجد** قيمةَ كل من س + ص ، س × ص فى الحالات الآتية:

أ س = $٣ + \sqrt{٥}$ ، ص = $١ - \sqrt{٥}$

ب س = $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$

جـ س = $٥ - ٣\sqrt{٢}$ ، ص = $٥ - ٣\sqrt{٢}$

العددان المترافقان

إذا كان أ ، ب عددين نسبيين موجبين

فإن كلًا من العددين $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})$ ، $(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$ **هو** مرافق للعدد الآخر .

ويكون مجموعهما = $٢\sqrt{أ}$ = ضعف الحد الأول

وحاصل ضربهما = $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب}) \times (\sqrt{أ} - \sqrt{ب}) = (\sqrt{أ})^{٢} - (\sqrt{ب})^{٢} = أ - ب$

= مربع الحد الأول - مربع الحد الثانى

حاصلَ ضربِ العددين المترافقين هو دائمًا عددٌ نسبىٌّ

إذا كان لدينا عددٌ حقيقىٌّ مقامه على الصورة $(\sqrt{أ} \pm \sqrt{ب})$ فيجب وضعُه فى أبسط صورةٍ ، وذلك بضرب البسطِ والمقامِ فى مرافق المقام .



تدرب

أكمل

أ $\sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ مرافقه (............) وحاصل ضربهما = ...

ب $٥ - \sqrt{٣}$ مرافقه (............) وحاصل ضربهما = ...

جـ $٢\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ مرافقه (............) وحاصل ضربهما = ...



أمثلة

١ إذا كانت $\text{س} = \frac{٨}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، $\text{ص} = \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ + \sqrt{٣}}$

اكتب كلًّا من س ، ص بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا ثم أوجد س + ص

الحل

$$\text{س} = \frac{٨}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}} = \frac{٨}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$$

$$= \frac{٨\left(\sqrt{٥} + \sqrt{٣}\right)}{\left(\sqrt{٥}\right)^{٢} - \left(\sqrt{٣}\right)^{٢}} = \frac{٨\left(\sqrt{٥} + \sqrt{٣}\right)}{٥ - ٣}$$

$$= ٤\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٣}$$

$$\text{ص} = \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ + \sqrt{٣}} = \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ + \sqrt{٣}} \times \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ - \sqrt{٣}}$$

$$= \frac{\left(٢ - \sqrt{٣}\right)^{٢}}{٤ - ٣} = \frac{٤ - ٤\sqrt{٣} + ٣}{١} = ٧ - ٤\sqrt{٣}$$

$$\text{س} + \text{ص} = ٤\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٣} + ٧ - ٤\sqrt{٣} = ٤\sqrt{٥} + ٧$$

٢ إذا كانت $\text{س} = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $\text{ص} = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$

أثبت أن س ، ص عددان مترافقان، ثم أوجد قيمة كلٍّ من المقدارين

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س ص} + \text{ص}^{٢}$ ، $(\text{س} - \text{ص})^{٢}$ ماذا تلاحظ؟

الحل

$$\text{س} = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}} = \frac{٤\left(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}\right)}{٧ - ٣} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$$

$$\text{ص} = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$$

∴ س ، ص عددان مترافقان

$$\text{س}^{٢} - ٢\text{س ص} + \text{ص}^{٢} = \left(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}\right)^{٢} - ٢\left(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}\right)\left(\sqrt{٧} - \sqrt{٣}\right) + \left(\sqrt{٧} - \sqrt{٣}\right)^{٢}$$

$$= \left(٧ + ٢\sqrt{٢١} + ٣\right) - ٢\left(٧ - ٣\right) + \left(٧ - ٢\sqrt{٢١} + ٣\right)$$

$$= ١٠ + ٢\sqrt{٢١} - ٨ + ١٠ - ٢\sqrt{٢١}$$

$$= ١٢$$

$$(\text{س} - \text{ص})^{٢} = \left[\left(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}\right) - \left(\sqrt{٧} - \sqrt{٣}\right)\right]^{٢}$$

$\therefore$ $(س - ص)^٢ = [\sqrt{٧} + \sqrt{٣} - \sqrt{٧} + \sqrt{٣}]^٢ = (٢\sqrt{٣})^٢$

$= ٤ \times ٣ = ١٢$

ويلاحظ أن $س^٢ - ٢س ص + ص^٢ = (س - ص)^٢$



٣ في المثالِ السابقِ احسب كلًّا من

أ $(س + ص)$ **ب** $(س - ص)$

جـ $(س + ص)(س - ص)$ **د** $س^٢ - ص^٢$ **ماذا تلاحظ**

الحل

أ $س = \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$ ، $ص = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$

فإن $س + ص = \sqrt{٧} + \sqrt{٣} + \sqrt{٧} - \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٧}$

ب $س - ص = \sqrt{٧} + \sqrt{٣} - (\sqrt{٧} - \sqrt{٣})$

$= \sqrt{٧} + \sqrt{٣} - \sqrt{٧} + \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

جـ $(س + ص)(س - ص) = ٢\sqrt{٧} \times ٢\sqrt{٣}$

$= ٤\sqrt{٢١}$

د $س^٢ - ص^٢ = (\sqrt{٧} + \sqrt{٣})^٢ - (\sqrt{٧} - \sqrt{٣})^٢$

$= (٧ + ٢\sqrt{٢١} + ٣) - (٧ - ٢\sqrt{٢١} + ٣)$

$= ٧ + ٢\sqrt{٢١} + ٣ - ٧ + ٢\sqrt{٢١} - ٣$

$= ٤\sqrt{٢١}$

نلاحظ أن $(س + ص)(س - ص) = س^٢ - ص^٢$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

الوحدة الأولى

الدرس التاسع

العمليات على الجذور التكعيبية

سوف تتعلم

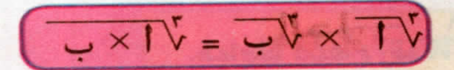
- العملياتُ على الجذور التكعيبية.

المصطلحات الأساسية

- الجذر التكعيبي.

فكّر وناقش

لأى عددينِ حقيقيين أ ، ب:

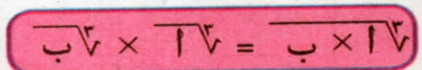
١ 

$$\sqrt[٣]{أ} \times \sqrt[٣]{ب} = \sqrt[٣]{أ \times ب}$$

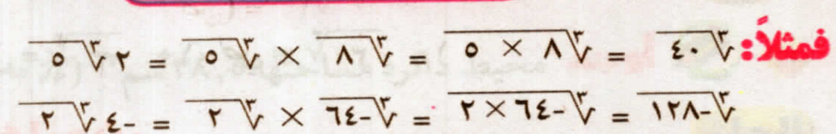
فمثلاً: $\sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٥ \times ٢} = \sqrt[٣]{١٠}$

$\sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{-٤} = \sqrt[٣]{٣ \times -٤} = \sqrt[٣]{-١٢}$

لأى عددين حقيقيين أ ، ب:

٢ 

$$\sqrt[٣]{أ \times ب} = \sqrt[٣]{أ} \times \sqrt[٣]{ب}$$



فمثلاً: $\sqrt[٣]{٤٠} = \sqrt[٣]{٨ \times ٥} = \sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٣]{٥} = ٢\sqrt[٣]{٥}$

$\sqrt[٣]{-١٢٨} = \sqrt[٣]{-٦٤ \times ٢} = \sqrt[٣]{-٦٤} \times \sqrt[٣]{٢} = -٤\sqrt[٣]{٢}$

٣ $\dfrac{\sqrt[٣]{أ}}{\sqrt[٣]{ب}} = \sqrt[٣]{\dfrac{أ}{ب}}$ حيث ب ≠ ٠ ، أ ، ب ∈ ح

فمثلاً: $\dfrac{\sqrt[٣]{١٢}}{\sqrt[٣]{٣}} = \sqrt[٣]{\dfrac{١٢}{٣}} = \sqrt[٣]{٤}$

٤ $\sqrt[٣]{\dfrac{أ}{ب}} = \dfrac{\sqrt[٣]{أ}}{\sqrt[٣]{ب}}$ حيث ب ≠ ٠ ، أ ، ب ∈ ح

فمثلاً: $\sqrt[٣]{\dfrac{٣}{٢}} = \dfrac{\sqrt[٣]{٣}}{\sqrt[٣]{٢}}$

فكّر إذا ضربنا كلًّا من البسط والمقام فى $\sqrt[٣]{٤}$ ، فأوجد الناتجَ فى أبسط صورة.





أمثلة

١ اختصر لأبسطِ صورة:

أ $\sqrt[3]{٥٤} + ٨\sqrt[3]{\frac{-١}{٤}} + ٥\sqrt[3]{١٦}$

ب $\sqrt[3]{٢٤} - ٦\sqrt[3]{١٣\frac{٨}{٩}}$

الحل

أ $\sqrt[3]{٥٤} + ٨\sqrt[3]{\frac{-١}{٤}} + ٥\sqrt[3]{١٦} = \sqrt[3]{٢٧ \times ٢} + ٨\sqrt[3]{\frac{-١}{٤} \times \frac{٢}{٢}} + ٥\sqrt[3]{٨ \times ٢}$

$= \sqrt[3]{٢٧} \times \sqrt[3]{٢} + ٨\frac{\sqrt[3]{-٢}}{\sqrt[3]{٨}} + ٥ \times \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٢}$

$= ٣\sqrt[3]{٢} + \frac{٨ \times -\sqrt[3]{٢}}{٢} + ٥ \times ٢ \times \sqrt[3]{٢}$

$= ٣\sqrt[3]{٢} - ٤\sqrt[3]{٢} + ١٠\sqrt[3]{٢} = ٩\sqrt[3]{٢}$

ب $\sqrt[3]{٢٤} - ٦\sqrt[3]{١٣\frac{٨}{٩}} = \sqrt[3]{٢٤} - ٦\sqrt[3]{\frac{١٢٥}{٨}} = \sqrt[3]{٨ \times ٣} - ٦ \times \frac{\sqrt[3]{١٢٥}}{\sqrt[3]{٨}}$

$= \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٣} - ٦ \times \frac{٥}{٢} = ٢\sqrt[3]{٣} - ١٥$

٢ إذا كانت $س = \sqrt[3]{٣} + ١$، $ص = \sqrt[3]{٣} - ١$

فأوجد قيمة كل من:

أ $(س + ص)^٣$ **ب** $(س - ص)^٣$

الحل

أ $(س + ص)^٣ = (\sqrt[3]{٣} + ١ + \sqrt[3]{٣} - ١)^٣$

$= (٢\sqrt[3]{٣})^٣ = ٨ \times ٣ = ٢٤$

ب $(س - ص)^٣ = (\sqrt[3]{٣} + ١ - \sqrt[3]{٣} + ١)^٣$

$= (٢)^٣ = ٨$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

الوحدة الأولى

الدرس العاشر

تطبيقات على الأعداد الحقيقية

فكر وناقش

سوف تتعلم

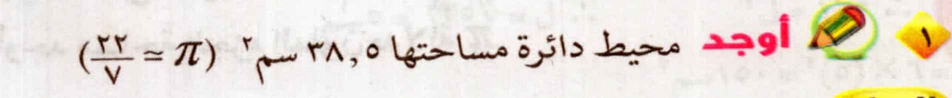
- حل تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

المصطلحات الأساسية

- دائرة.
- متوازى المستطيلات.
- مكعب.
- أسطوانة دائرية قائمة.
- كرة.

الدائرة





محيط الدائرة = ٢ π نق وحدة طولية.

مساحة الدائرة = π نق^2 وحدة مربعة

حيث نق طول نصف قطر الدائرة، π (النسبة التقريبية)

أمثلة

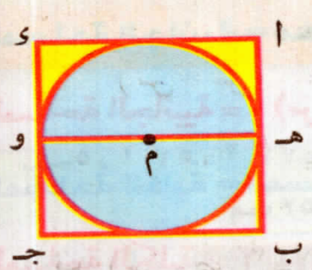
١ **أوجد** محيط دائرة مساحتها ٣٨,٥ سم^2 $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$

الحل

مساحة الدائرة = π نق^2

$٣٨,٥ = \frac{٢٢}{٧}$ نق^2 $\therefore$ نق^2 $= \frac{٧ \times ٣٨,٥}{٢٢} = \frac{٤٩}{٤}$

$\therefore$ نق $= \sqrt{\frac{٤٩}{٤}} = \frac{٧}{٢} = ٣,٥$ سم



٢ فى الشكلِ المقابلِ الدائرة م مرسومة داخل المربع أ ب جـ ء، فإذا كانت مساحة الجزء الملون باللون الأصفر $\frac{٥}{٧}$ ١٠سم^2

أوجد محيط هذا الجزء $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$

الحل

نفرض أن طولَ نصف قطر الدائرة = نق .

$\therefore$ طول ضلع المربع = ٢ نق

مساحة الجزء باللون الأصفر = مساحة المستطيل أهـ و ى - مساحة نصف الدائرة

$١٠ \frac{٥}{٧}$ = نق × ٢نق - $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق^٢

$\frac{٧٥}{٧}$ = ٢ نق^٢ - $\frac{١١}{٧}$ نق^٢ = $\frac{٣}{٧}$ نق^٢

∴ نق^٢ = ٢٥ ∴ نق = ٥سم

محيط الجزء باللون الأصفر = (أهـ + أى + ى و) + $\frac{١}{٢}$ محيط الدائرة

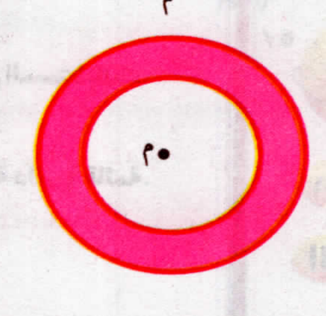
= (٥ + ١٠ + ٥) + $\frac{١}{٢}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٥ = $٣٥ \frac{٥}{٧}$سم

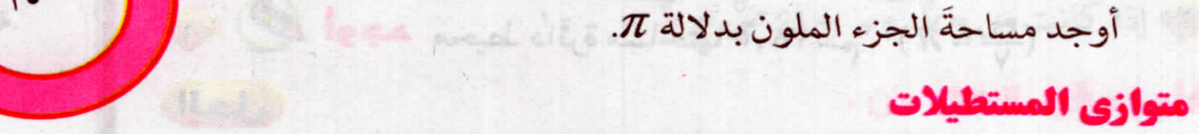
تدرب

١ دائرةٌ مساحتها ٦٤ π سم^٢. أوجد طولَ نصف قطرها ، ثم أوجد محيطها لأقرب عددٍ صحيحٍ ($\pi \simeq ٣,١٤$).

٢ **فى الشكلِ المقابل:** $\overline{أب}$ قطر نصف الدائرة فإذا كانت مساحة هذه المنطقة ١٢,٣٢ سم^٢ أوجد محيط الشكل.

٣ **فى الشكلِ المقابل:** دائرتان متحدتان فى المركز م طول نصفى قطريهما ٣سم ، ٥سم.
أوجد مساحةَ الجزء الملون بدلالة π.

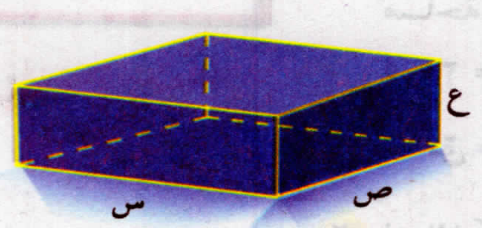




متوازى المستطيلات

هو مجسمٌ جميع أوجهه الستة مستطيلة الشكل، وكل وجهين متقابلين متطابقان

إذا كانت أطوال أحرفه س ، ص، ع فإن:





المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية = ٢ (س + ص) × ع **وحدة مربعة**

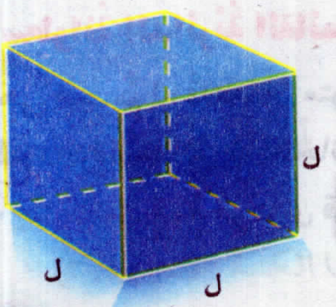
المساحةُ الكليةُ = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

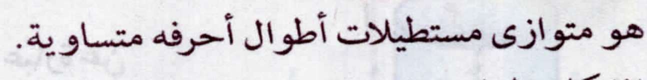
المساحة الكلية = ٢ (س ص + ص ع + س ع) **وحدة مربعة**

حجمُ متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم متوازى المستطيلات = س × ص × ع **وحدة مكعبة**

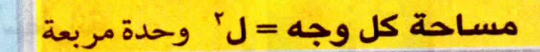
حالة خاصة: المكعب





هو متوازى مستطيلات أطوال أحرفه متساوية.

إذا كان طول حرفه = ل وحدة طول فإن



مساحة كل وجه = ل^{2} وحدة مربعة

مساحته الجانبية = ٤ ل^{2} وحدة مربعة

مساحته الكلية = ٦ل^{2} وحدة مربعة

حجم المكعب = ل^{3} وحدة مكعبة



مثال

أوجد المساحةَ الكليةَ لمكعبٍ حجمه ١٢٥سم^{3}

الحل

حجم المكعب = ل^{3} $\therefore$ ١٢٥ = ل^{3} $\therefore$ ل = $\sqrt[3]{١٢٥}$ = ٥سم

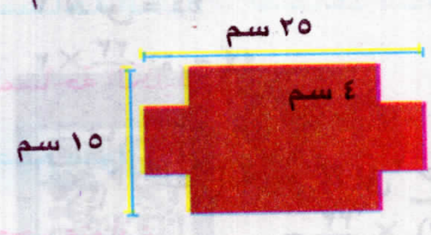
المساحة الكلية = ٦ل^{2} = ٦ × (٥)^{2} = ١٥٠سم^{2}

تدرب

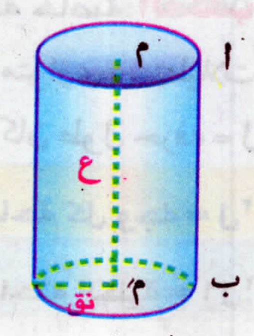
١ متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان حجمه ٧٢٠سم٣ وارتفاعه ٥سم أوجد مساحته الكلية.

٢ **أيهما أكبر حجمًا:** مكعب مساحته الكلية ٢٩٤سم^{2} أم متوازى مستطيلات أبعاده ٧$\sqrt{٢}$ ، ٥$\sqrt{٢}$ ، ٥سم.

٣ قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بعداها ٢٥، ١٥سم قطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه ٤سم. ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضًا على شكل متوازى مستطيلات، أوجد حجمه ومساحته الكلية.



الأسطوانةُ الدائريَّةُ القائمةُ



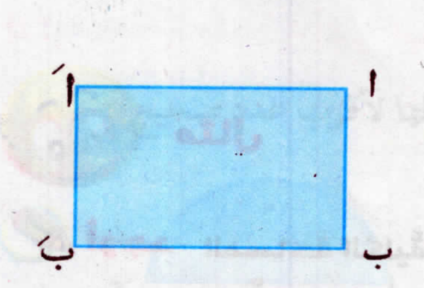
هى مجسمٌ له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منهما عبارة عن سطح دائرةٍ، أما السطحُ الجانبىُّ فهو سطحٌ منحن يسمى سطح الأسطوانة.

- إذا كانت م، مَ مركزى قاعدتى الأسطوانة فإن م مَ هو ارتفاع الأسطوانة.

هيا نفكر إذا كانت ا ∈ الدائرة م، ب ∈ الدائرة مَ ، $\overline{اب}$ // $\overline{م مَ}$

- و قطعنا سطح الأسطوانة الجانبى عند ا ب

وبسطنا هذا السطحَ فإننا نحصلُ على سطحِ المستطيل ا ب بَ اَ



ويكون ا ب = ارتفاع الأسطوانة ، ا اَ = محيط قاعدة الأسطوانة.

مساحة المستطيل ا ب بَ اَ = المساحة الجانبيةُ للأسطوانة.

المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ π نق ع وحدة مربعة

المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢} وحدة مربعة

حجم الأسطوانة = مساحةُ القاعدة × الارتفاع = π نق^{٢} ع وحدة مربعة



مثال

قطعةٌ من الورقِ على شكلِ مستطيل ا ب جـ ء ، فيه ا ب = ١٠ سم، ب جـ = ٤٤ سم، طويت على شكل أسطوانةٍ دائريةٍ قائمةٍ، بحيث ينطبقُ $\overline{ا ب}$ على ء جـ أوجد حجم الأسطوانة الناتجة ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$).

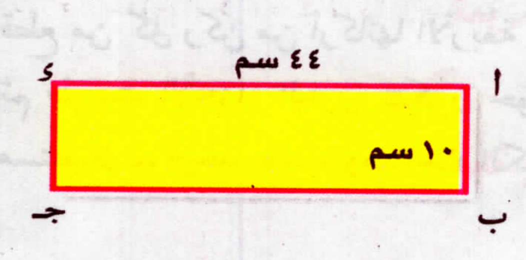
الحل

محيط قاعدة الأسطوانة = ٤٤ سم.

٢ π نق = ٤٤

٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق = ٤٤

∴ نق = ٧ سم



حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع

= $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)^{٢} × ١٠ = ١٥٤٠ سم^{٣}



تدرب

1. أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ، طول نصف قطر قاعدتها ١٤سم، وارتفاعها ٢٠سم. أوجد حجمَها ومساحتها الكلية.
2. أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ حجمها ٧٥٣٦سم^{٣} ، وارتفاعها ٢٤سم أوجد مساحتها الكلية ($\pi \simeq$ ٣,١٤)
3. أيهما أكبر حجمًا: أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ طول نصف قطر قاعدتها ٧سم وارتفاعها ١٠سم، أم مكعب طول حرفه ١١سم.

الكرة

هى مجسمٌ سطحه منحنى جميع نقاط سطحه على أبعاد متساوية (نق) من نقطة ثابتة داخله (مركز الكرة).



إذا قطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع دَائرةٌ مركزها هو مركز الكرة ، وطول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة نق.

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} وحدة مكعبة.

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} وحدة مربعة.

مثال

كرة حجمها ٥٦٢,٥ π سم^{٣} أوجد مساحة سطحها

الحل

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

٥٦٢,٥ π = $\frac{٤}{٣}$ × π نق^{٣}

∴ نق^{٣} = ٥٦٢,٥ × $\frac{٣}{٤}$ = ٤٢١,٨٧٥

نق = $\sqrt[٣]{٤٢١,٨٧٥}$ = ٧,٥سم

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} = ٤ × π (٧,٥)^{٢} = ٢٢٥π سم^{٢}



تدرب

أوجد الحجمَ ومساحةَ السطح لكرة طول قطرها ٤,٢ سم ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الوحدة الأولى

الدرس الحادى عشر

حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

فكر وناقش

سوف تتعلم

- حل المعادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد.
- حل المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد.

المصطلحات الأساسية

- المعادلة.
- الدرجة المعادلة.
- المتباينة.
- الدرجة المتباينة.
- حل المعادلة.
- حل المتباينة.

أولاً: حل المعادلاتِ من الدرجة الأولى فى متغيرٍ واحد فى ح

نعلم أن المعادلة ٣ س - ٢ = ٤ تسمى معادلة من الدرجة الأولى

حيث أن س المتغير (المجهول)

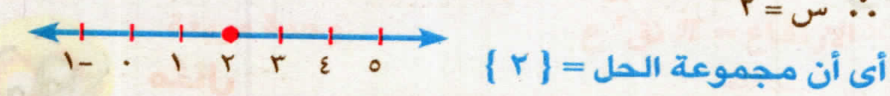
ولحل هذه المعادلة فى ح

٣ س - ٢ = ٤ بإضافة ٢ إلى طرفى المعادلة

٣ س = ٦ ويمكن الضرب فى المعكوس الضربى لمعامل س

$\frac{1}{3} \times$ ٣س = $\frac{1}{3} \times$ ٦

∴ س = ٢



أى أن مجموعة الحل = {٢}

ويمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل



أمثلة

١ **أوجد** فى ح مجموع حل المعادلة $\sqrt{3}$ س - ١ = ٢ ومثل الحل على خط الأعداد.

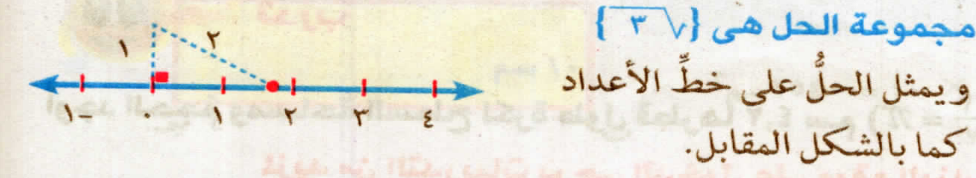
الحل

$\sqrt{3}$ س - ١ = ٢ ∴ $\sqrt{3}$ س = ٣

∴ س = $\frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ ∴ س = $\sqrt{3}$ ∈ ح

مجموعة الحل هى {$\sqrt{3}$}

ويمثل الحلُ على خطِّ الأعداد كما بالشكل المقابل.



٢ **أوجد** في ح مجموعة حلِّ المعادلة $س + \sqrt{٢} = ١$ ، ومثل الحلَّ على خطِّ الأعداد.

الحل

$س + \sqrt{٢} = ١$ ∴ $س = ١ - \sqrt{٢} \in ح$

ويمثل الحلّ على خطِّ الأعداد كما بالشكل المقابل.

تدرب

١ **أوجد** في ح مجموعة الحلِّ لكلٍّ من المعادلاتِ الآتيةِ ومثِّل الحلَّ على خطِّ الأعداد.

أ $٥س + ٦ = ١$ ب $٢ س + ٤ = ٣$ جـ $٢ س - ٣ = ٤$

د $س + ٥ = ٠$ هـ $\sqrt{٢}$ س $- ١ = ١$ و $س - ١ = \sqrt{٥}$

ثانيًا: حل المتباينات من الدرجة الأولى في متغيرٍ واحدٍ في ح وتمثيل الحلّ على خطّ الأعداد.

الخواصُّ التاليةُ تستخدم لحلِّ المتباينة في ح وتكتب مجموعة الحل على صورة فترة:

إذا كانت أ ، ب، جـ أعدادًا حقيقيَّة وكان أ < ب فإن:

١ أ + جـ < ب + جـ. **خاصية الإضافة.**

٢ إذا كانت جـ > ٠ فإن أ × جـ < ب × جـ. **خاصية الضرب في عددٍ حقيقيٍّ موجب.**

٣ إذا كان جـ < ٠ فإن أ × جـ > ب × جـ. **خاصية الضرب في عدد حقيقي سالب.**

أمثلة

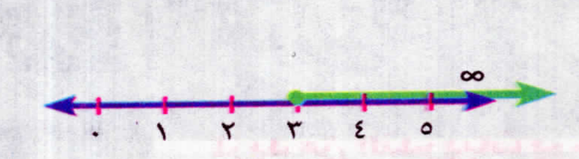
١ **أوجد** مجموعة حل المتباينة ٢ س - ١ ≤ ٥ في ح ومثل الحل بيانيًا.

الحل

بإضافة ١ إلى طرفي المتباينة تصبح ٢ س ≤ ٦

بضرب طرفي المتباينة في ($\frac{١}{٢} > ٠$) س ≤ ٣

∴ مجموعة الحل في ح هي [٣ ، ∞[



ويمثلها الشعاع باللون الأخضر على خط الأعداد.

٢ **أوجد** في ح مجموعةَ حلِّ المتباينة ٥ - ٣ س > ١١، ومثِّل الحلَّ بيانيًّا.

الحل

بإضافة (-٥) إلى طرفي المتباينة فيكون -٣ س > ٦

بضرب طرفي المتباينة في (- $\frac{١}{٣}$) ينتج أن:

∴ س < -٢

أي أن مجموعة الحل في ح هي]- ∞ ، -٢[

ويمثلها الجزء باللون الأخضر على خط الأعداد

٣ **أوجد** في ح مجموعة حل المتباينة -٣ ≤ ٢س -١ < ٥ ومثل الحل بيانيًّا

الحل

بإضافة (١) إلى حدود المتباينة -٣ + ١ ≤ ٢س -١ + ١ < ٥ + ١

أي -٢ ≤ ٢ س < ٦، وبضرب حدود المتباينة في ($\frac{١}{٢}$ > ٠)

-١ ≤ س < ٣

∴ مجموعة الحل في ح هي [-١، ٣[

ويمثلها على خطِّ الأعداد الجزءُ باللون الأخضر.

في مثال ٣ ما مجموعةُ حلِّ المتباينة في ط؟

ما مجموعةُ حلِّ المتباينة في ص؟

٤ أوجد في ح مجموعة حل المتباينة ٢س + ٣ ≤ ٥س + ٣ < ٢س + ٩ ومثل الحل بيانيا :

الحل

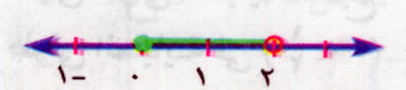
٢س + ٣ ≤ ٥س + ٣ < ٢س + ٩ بإضافة (-٢س)

٣ ≤ ٣س + ٣ < ٩ بإضافة (-٣)

٠ ≤ ٣س < ٦ بضرب حدود المتباينة

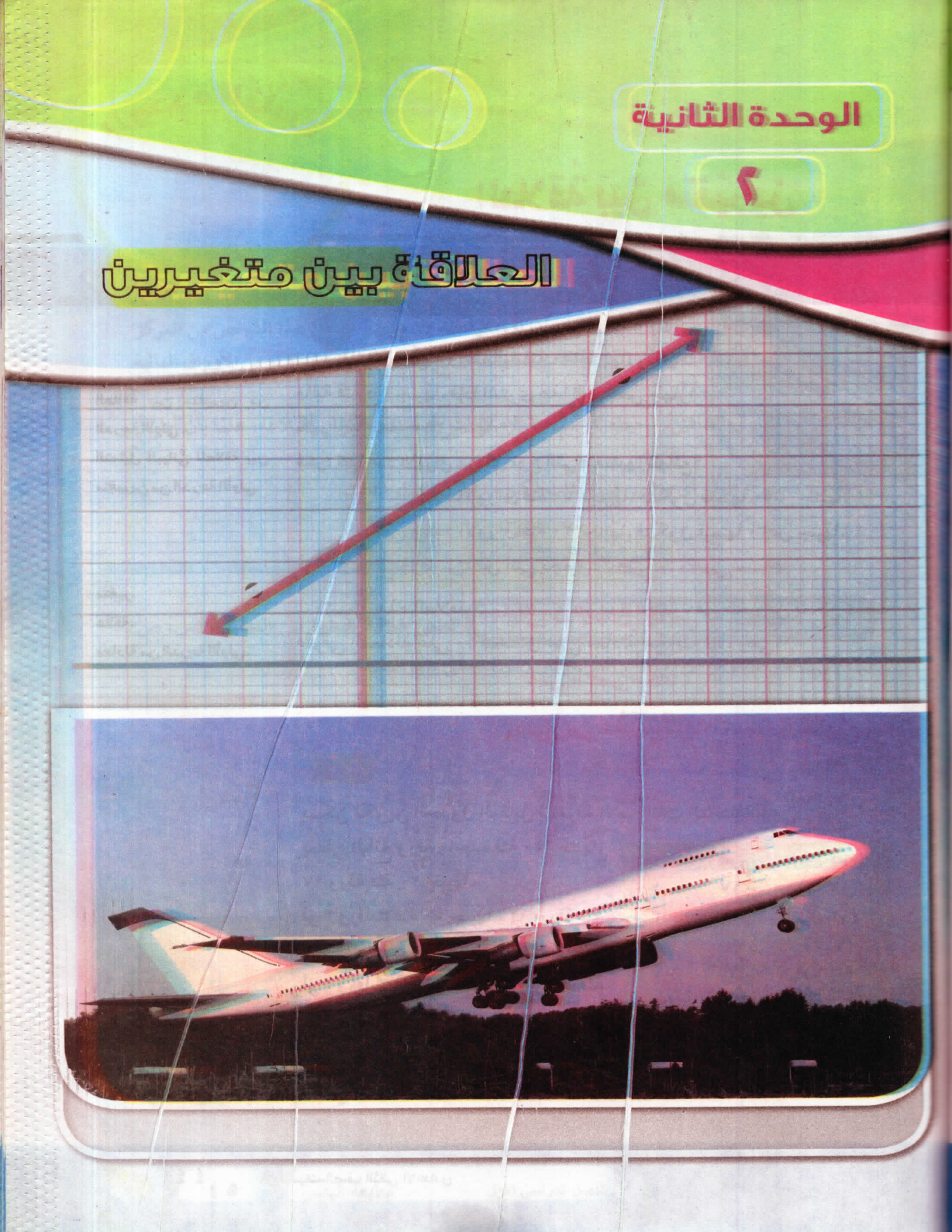
٠ ≤ س < ٢

مجموعة الحل في ح هي [٠ ، ٢[



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني





الوحدة الثانية
٢
العلاقة بين متغيرين

الوحدة الثانية

الدرس الأول

العلاقةُ بين متغيِّرين

فكر وناقش

سوف تتعلم:

العلاقةُ بين متغيرين من الدرجة الأولى.

التمثيلُ البيانيُّ للعلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.

مصطلحات أساسية

متغير.

علاقة.

معادلة من الدرجة الأولى.

يمتلك شخص أوراقًا مالية فئة ٥٠ جنيهًا، وأوراقًا مالية فئة ٢٠ جنيهًا، فإذا اشترى هذا الشخص جهازًا كهربائيًا ثمنه ٣٩٠ جنيهًا.

فكر: كم عدد الأوراق من كل نوع التى يعطيها البائع؟

نفرض أن س عدد الأوراق فئة ٥٠ جنيهًا، فتكون قيمتها ٥٠س جنيهًا.

وأن ص عدد الأوراق فئة ٢٠ جنيهًا، فتكون قيمتها ٢٠ص جنيهًا.

والمطلوب معرفة س، ص التى تجعل: **٥٠س + ٢٠ص = ٣٩٠**

تسمى هذه العلاقةُ **معادلة من الدرجة الأولى**، فى متغيرين يمكن قسمةُ طرفى المعادلة على ١٠ فنحصل على معادلة مكافئة لها، وهى:

٥س + ٢ص = ٣٩

وتكون ص = $\frac{٣٩ - ٥س}{٢}$

لاحظ أن: كل من س، ص أعداد طبيعية، وفى هذه الحالة تكون س عددًا فرديًا

يمكن تكوينُ الجدولِ المقابل لمعرفة الإمكانات المختلفة وهى:

يعطى البائع ورقة واحدة فئة ٥٠ جنيهًا، ١٧ ورقة فئة ٢٠ جنيهًا.

أو ٣ ورقات فئة ٥٠ جنيهًا ، ١٢ ورقة فئة ٢٠ جنيهًا.

أو ٥ ورقات فئة ٥٠ جنيهًا ، ٧ ورقات فئة ٢٠ جنيهًا .

أو ٧ ورقات فئة ٥٠ جنيهًا ، ورقتين فئة ٢٠ جنيهًا.

س	ص	(س،ص)
١	١٧	(١، ١٧)
٣	١٢	(٣، ١٢)
٥	٧	(٥، ٧)
٧	٢	(٧، ٢)
٩	سالبة	لاتصلح

تدرب

١ مع شخص أوراقٌ ماليةٌ فئة ٥ جنيهات، وأوراقٌ ماليةٌ فئة ٢٠ جنيهًا. اشترى هذا الشخص من المركز التّجارى بما قيمته ٧٥ جنيهًا، ما الإمكانات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام نوعى الأوراق المالية التى معه؟

٢ مثلثٌ متساوى السّاقين، محيطه ١٩سم، ما الإمكاناتُ المختلفةُ لأطوالِ أضلاعه، علمًا بأن أطوالَ أضلاعه ∈ ص+

لاحظ أن: مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

دراسةُ العلاقةِ بين متغيّرين

أ س + ب ص = جـ حيث أ ≠ ٠، ب ≠ ٠ تسمى عَلاقة خطية بين المتغيرين س، ص

ويمكن إيجادُ مجموعةٍ من الأزواج المرتبة (س، ص) تحقّق هذه العلاقةَ.

مثلاً:

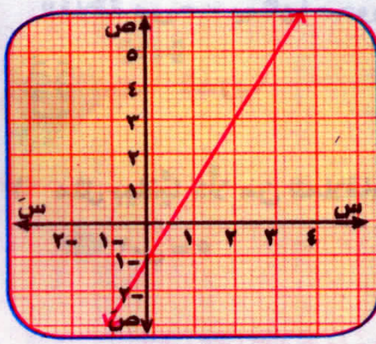
بدراسة العلاقة ٢س − ص = ١

عند س = ١	تكون ص = ١	∴ (١، ١)	تحقق العلاقة
عند س = ٠	تكون ص = −١	∴ (٠، −١)	تحقق العلاقة
عند س = ٣	تكون ص = ٥	∴ (٣، ٥)	تحقق العلاقة
عند س = −١	تكون ص = −٣	(−١، −٣)	تحقق العلاقة

وهكذا نجدُ أن هناك عددًا لانهائى من الأزواج المرتبة التى تحقّق هذه العلاقة.

لاحظ أن:

- يمكن تمثيلُ العلاقة ٢س − ص = ١، بيانيًا باستخدام بعض الأزواج المرتبة التى حصلنا عليها.
- كل نقطة ∈ الخط المستقيم باللون الأحمر، يمثلها زوجٌ مرتبٌ يحقّق العَلاقة ٢س − ص = ١.





1 أوجد أربع أزواج مرتبة تحقق كلًا من العَلاقات الآتية ، ومثلها بيانيًا:

أ س + ص = ٣ ب س − ٢ص = ٥

جـ ص = ٢ د س = ١

2 إذا كان (-٣، ٢) تحقق العلاقة ٣ س + ب ص = ١، فأوجد قيمة ب.

3 إذا كان (ك، ٢ك) تحقق العلاقة س + ص = ١٥ ، فأوجد قيمة ك.

التمثيلُ البيانيُّ للعلَاقةِ بين متغيرين

العلاقة **أ س + ب ص = جـ** حيث أ، ب كلاهما معًا ≠ ٠ تسمى علاقة بين المتغيرين س ، ص ويمثلها بيانيًا خط مستقيم.

إذا كانت **أ = ٠**

يمثلها مستقيمٌ يوازى محور السينات.

مثلاً: العلاقة ٢ ص = ٣

اى: ص = $\frac{٣}{٢}$

يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر وهو يمر بالنقطة (٠، $\frac{٣}{٢}$) ويكون موازيًا لمحور السينات.

حالة خاصة:

العَلاقة ص = ٠ يمثلها محور السينات.

إذا كانت **ب = ٠**

يمثلها مستقيمٌ يوازى محور الصادات.

مثلاً: العلاقة س = -٢

يمثلها الخط المستقيم باللون الأحمر وهو يمر بالنقطة (-٢، ٠) ويكون موازيًا لمحور الصادات.

حالة خاصة:

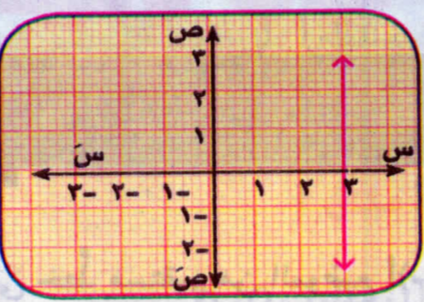
العلاقة س = ٠ يمثلها محور الصادات.



1 مثل بيانيًا كلًا من العلاقات الآتية:

أ ٢س = ٥ ب ص + ١ = ٠

٢ أوجد العلاقةَ التى يمثلها الخطُّ المستقيمُ باللونِ الأحمرِ فى كلًّا من الشكلين التاليين:







مثال

مثل بيانيًّا العلاقة: س + ٢ ص = ٣

الحل

يمكن اختيارُ مجموعةٍ من الأزواج المرَّتبة التى تحقِّق هذه العلاقة:

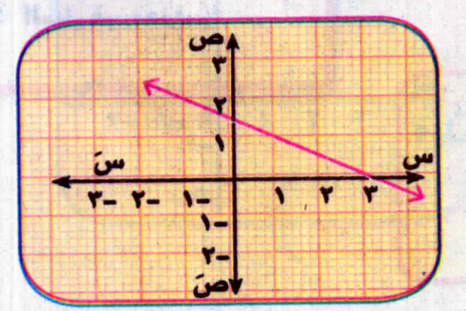
مثلاً: بوضع ص = ٢ ∴ س = -١ (-١، ٢) يحقق العلاقة

بوضع ص = ٠ ∴ س = ٣ (٣، ٠) يحقق العلاقة

بوضع ص = -١ ∴ س = ٥ (٥، -١) تحقق العلاقة وهكذا..

ويمكن وضعُ هذه النتائج فى صورة جدولٍ كالتالى:

س	-١	٣	٥	٠
ص	٢	٠	-١	$\frac{3}{2}$



وتمثل هذه العلاقةُ الخطَّ المستقيمَ باللون الأحمر.

ناقش مع معلمك:

١ ماذا تلاحظُ على تغير قيمة ص كلما زادت قيمة س؟

٢ متى يمرُّ الخطُّ المستقيمُ الممثل للعلاقة أس + ب ص = جـ بنقطة الأصل؟



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الوحدة الثانية

الدرس الثانى

ميل الخطِّ المستقيم وتطبيقاتٌ حياتية

فكّر وناقش

سوف تتعلم

- ميل الخطِّ المستقيم.
- تطبيقاتٌ حياتيةٌ على ميل الخطِّ المستقيم.

مصطلحات أساسية

- ميل.
- ميل موجب.
- ميل سالب.
- الميل يساوى صفرًا.
- الميل غير معرف.

إذا لاحظنا تحرّك نقطةٍ على خطٍّ مستقيمٍ من الموضع أ($س_1$، $ص_1$) إلى الموضع ب ($س_2$، $ص_2$) حيث $س_2 > س_1$

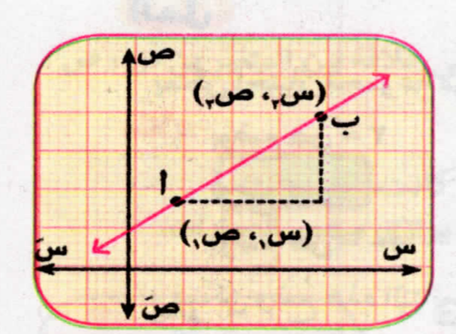
وكل من أ، ب ∈ المستقيم **فإن:**

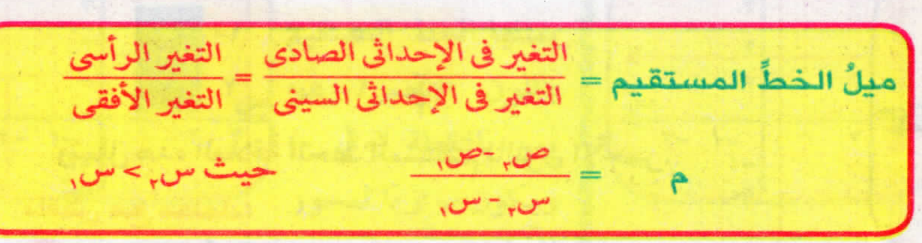
التغيُّر فى الإحداثى السينى = $س_2 - س_1$

ويسمى بالتغير الأفقى

التغير فى الإحداثىِّ الصادىِّ = $ص_2 - ص_1$

ويسمى

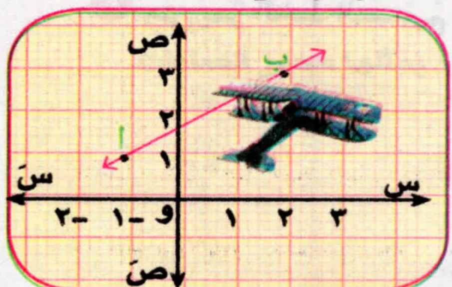




ميلُ الخطِّ المستقيم = $\frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$

م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ حيث $س_2 > س_1$

فى الأمثلةِ الآتية ستدرس الحالاتِ المختلفة للتغير الرأسى ($ص_2 - ص_1$):



مثال ١

إذا كانت: أ = (-١، ١)، ب = (٢، ٣).



فإن: ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٣ - ١}{٢ - (-١)} = \frac{٢}{٣}$

تلاحظ أن:

١ تحركت نقطة أ على الخطِّ المستقيمِ لأعلى لتصلَ إلى نقطة ب.

٢ $ص_٢ > ص_١$ ٣ الميل موجب.



مثال ٢

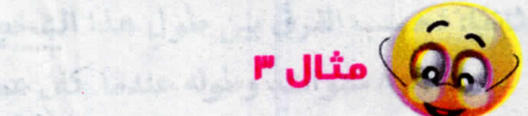
إذا كانت: أ (٠، ٢)، ب (٢، ١)

فإن: ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١ - ٢}{٢ - ٠} = -\frac{١}{٢}$

تلاحظ أن:

١ تحركت نقطةُ أ على المستقيمِ لأسفل لتصل إلى نقطة ب.

٢ $ص_٢ < ص_١$ ٣ الميل سالب.



مثال ٣

إذا كانت: أ (-١، ٢) ، ب (٣، ٢)

فإن: ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٢ - ٢}{٣ - (-١)} = \frac{صفر}{٤} =$ صفرًا.

تلاحظ أن:

١ تحركت نقطة أ أفقيًا لتصل إلى نقطة ب.

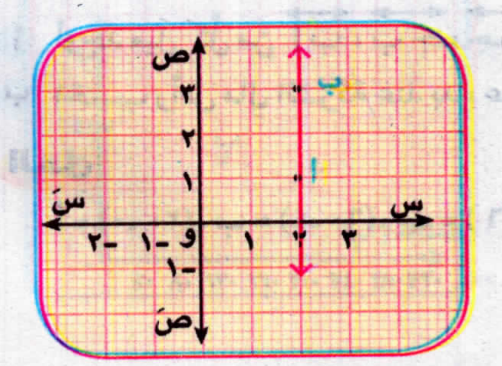
٢ $ص_٢ = ص_١$ ٣ الميل = صفر.



مثال ٤

إذا كانت: أ = (٢، ١)، ب(٢، ٣) فإننا لانستطيع حسابَ الميل؛ لأن تعريفَ الميلِ يشترطُ وجودَ تغيرٍ فى الإحداثيِّ السينيِّ.

أى: $س_٢ - س_١ \neq ٠$



وتلاحظ أن:

١ تحركت نقطةُ أ رأسيًا لتصل إلى نقطة ب.

٢ $س_٢ = س_١$ ٣ الميل غير معرف.

تدرب

١ فى كلٍّ من الحالاتِ التالية، أوجد ميلَ المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$.

أ ا (١، ٢)، ب (٥، ٠) ب ا (٢، -١)، ب (٤، -١)

جـ ا (-١، ٣)، ب (٢، ١) د ا (٣، -١)، ب (٣، ٢)

٢ إذا كانت ا (٢، -١)، ب (٣، ٢)، جـ (٤، ٥)، أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ، ومثل كلًّا منهما بيانيًّا ماذا تلاحظ ؟

٣ اختر الإجابةَ الصحيحَة من بين القوسينِ أمامَ كلِّ عبارةٍ:

أولاً: الجدولُ الآتى يبين علاقة س، ص، وهى:

(ص = س + ٤ أو ص = س + ١ أو ص = ٢س - ١ أو ص = ٣س - ٢)

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

ثانيًا: إذا كان (٢، -٥) يحقِّق العلاقة ٣س - ص + جـ = ٠ فإن جـ = ...

(١ أو -١ أو ١١ أو -١١)

ثالثًا: (٣، ٢) لايحقق العَلاقةَ .... (ص + س = ٥ أو ٣ص - س = ٣ أو ص + س = ٧ أو ص - س = ١)

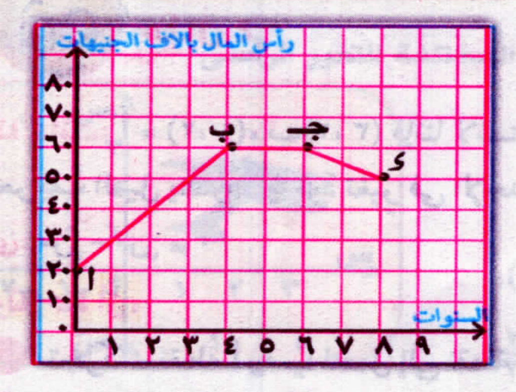
رابعًا: تستهلك آلةٌ للريِّ ٢,٤٧ من اللتر من السولار؛ لتشغيلها ٣ ساعات، فإذا عملت الآلة ١٠ ساعات، فإنها تستهلك .... من اللتر من السولار. (٧,٢ أو ٨ أو ٨,٤ أو ٩,٦)

٤ أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث ا (-١، ٣)، ب (٢، ٥) هل النقطة جـ (٨، ١) ∈ $\overleftrightarrow{أب}$

تطبيقاتٌ حياتيةٌ على ميلِ الخطِّ المستقيمِ

تطبيق (١)

الشكلُ المقابلُ: يوضِّح تغيرَ رأسِ مالِ شركةٍ خلال ٨ سنوات.



أ أوجد ميلَ كلٍّ من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$، $\overleftrightarrow{جـ ى}$ ما دلالةُ كلٍّ منها؟

ب احسب رأسَ مالِ الشركة عند بدءِ عملها.

الحل

ا = (٠، ٢٠)، ب = (٤، ٦٠)، جـ = (٦، ٦٠)، ى = (٨، ٥٠)

أولًا: ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٦٠ - ٢٠}{٤ - ٠}$ = ١٠ وهو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة خلال السنوات الأربعة الأولى بمعدل ١٠ آلاف جنيه.

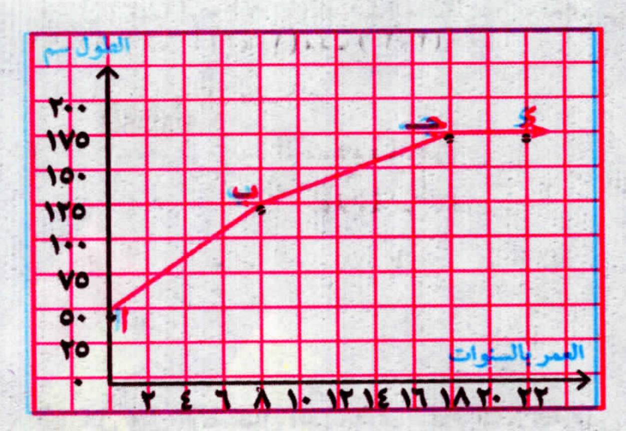
ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{٦٠ - ٦٠}{٦ - ٤}$ = صفر وهو يعنى أن رأس مال الشركة كان ثابتًا خلال السنتين الخامسة والسادسة.

ميل $\overleftrightarrow{جـ ى}$ = $\frac{٥٠ - ٦٠}{٨ - ٦}$ = -٥ وهو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة خلال السنتين الأخيرتين بمعدل ٥ آلاف جنيه.

ثانيًا: رأسُ مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثى الصادى لنقطة أ = ٢٠ ألف جنيه.



تدرب

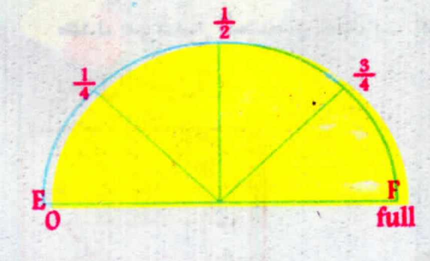


الشكلُ المقابلُ يوضِّحُ العلاقة بين طولِ شخصٍ (بالسنتيمتر) وعمره بالسنوات.

أولاً: أوجد ميلَ كلٍّ من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$، $\overleftrightarrow{جـ ى}$ وما دلالةُ كلٍّ منها؟

ثانيًا: احسب الفرقَ بين طولِ هذا الشخص عندما كان عمره ٨ سنوات، وطوله عندما كان عمره ٣٠ سنة.

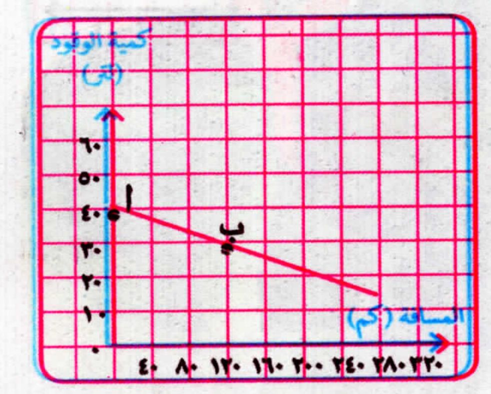
تطبيق (٢)



ملأ حازم خزانَ سيارته بالوقود، وسعةُ هذا الخزان ٤٠ لترًا ، وبعد أن تحرك ١٢٠ كم ، وجد أن المؤشِّر يوضِّح أن المتبقى $\frac{٣}{٤}$ سعة الخزان، ارسم الشكلَ البيانيَّ الذى يوضِّح العَلاقة بين كميةِ الوقود بالخزان والمسافة التى قطعتها السيارةُ (علما بأن هذه العلاقة خطية)، واحسب المسافة التى تقطعُها السيارةُ حتى يفرِغ الخزانُ.

الحل

عند البدء: أ (٠، ٤٠)
(٠: المسافة المقطوعة، ٤٠: كمية الوقود المستخدمة)



بعد قطع ١٢٠ كم ب = (١٢٠، ٣٠)

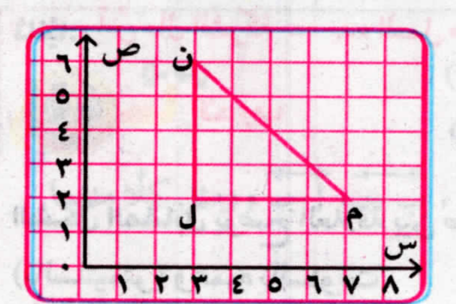
ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٣٠ - ٤٠}{١٢٠ - ٠}$ = $\frac{-١}{١٢}$

هذا الميلُ يعنى أن كميةَ الوقودِ بالخزان تنقصُ بمعدلِ لترٍ واحد كل ١٢ كم.

يفرغ الخزانُ عندما تقطعُ السيارةُ مسافةً = $\frac{\text{كمية الوقود}}{\text{معدل النقص}}$ = $\frac{٤٠}{\frac{١}{١٢}}$

= ٤٠ × $\frac{١٢}{١}$ = ٤٨٠ كم.

لاحظ أن: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع مُحورَ المسافة فى النقطة (٤٨٠، ٠) وهى تعبِّر عن المطلوب.



٥ فى الشكل المقابل:

ل م ن مثلثَ قائم الزاوية فى ل ، ق (∠ م) = ٤٥° فإذا كان ل (٣، ٢)، م (٧، ٢) أوجد إحداثى ن واحسب ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$.

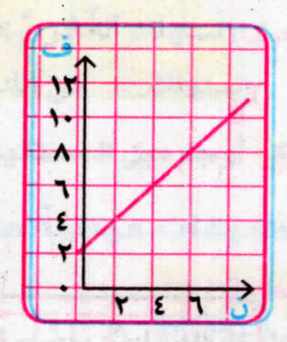
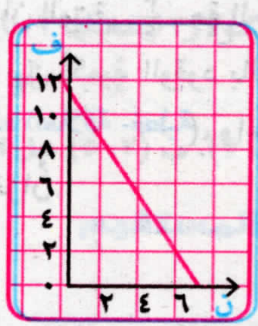
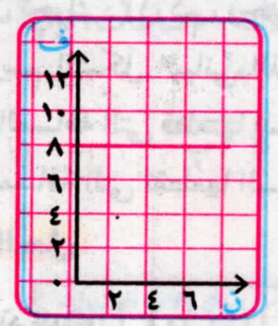
الحل

إحداثى ن = (٣ ، ٦)

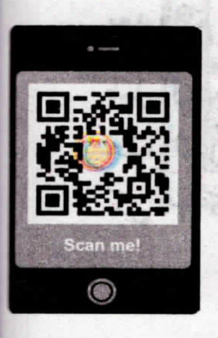
ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ = $\frac{٦ - ٢}{٣ - ٧}$ = $\frac{٤}{-٤}$ = -١

٦ كلٌّ من الأشكال التالية يوضِّحُ العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) والزمن ن (بالثانية) لجسم.

حدد موضعَ الجسمِ عند بدأ الحركة، وعند ن = ٦ ثوان ، وأوجد ميلَ المستقيم فى كلِّ حالةٍ (ماذا يمثل الميل؟).

ناقِشْ معلمك فى حل رقم ٦



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني


الوحدة الثالثة
٣
الإحصاء

الوحدة الثالثة

الدرس الأول

جمع البيانات وتنظيمها

فكّر وناقش

سوف تتعلم

- كيفية جمع البيانات وتنظيمها فى جداول تكرارية ذات مجموعات.

المصطلحات الأساسية

- جمع البيانات.
- تنظيم البيانات.
- جدول تكرارى ذو مجموعات.

إذا بحثت ظاهرةَ التكدُّس المرورى وطرق علاجه:

- ما مصادرُك للحصول على البيانات؟
- كيف يمكنك جمعُ البياناتِ حول هذه الظاهرة؟
- ما الطرقُ الإحصائيةُ التى سوف تستخدمها لتحليلِ البيانات؟
- هل تستطيعُ تفسير النتائج التى توصلت إليها؟
- ما مقترحاتُك لعلاج هذه الظاهرة وتحقيق السيولة المروريَّة؟

جمع البيانات

عمل تعاونى **تعاون مع زملائك فى جمع البيانات من مصادرها بتوزيع الأدوار:**

أ **المجموعة الأولى:** اجمع بيانات ابتدائية عن الظاهرة محلَّ الدراسة عن طريق استبيان تدور أسئلته حول (وسيلة المواصلات المستخدمة فى التنقل - حالة الطرق - زمن التكدس المرورى - وجود إشارات استرشادية على الطرق - التواجد الأمنى).

ب **المجموعة الثانية:** اجمع بيانات ثانوية عن الظاهرة محلَّ الدراسة من النشرات المرورية - الإنترنت - مصادر الإعلام.

جـ **المجموعة الثالثة:** لاحظ أى الطرق أكثر ازدحامًا، وسلوك قائدى السيارات والتزامهم بقوانين المرور، ومدى التزام المشاة بآداب الطريق، وعبور الطرق من المناطق المعدة لعبور المشاة.



تنظيمُ وتحليل البيانات

تعاون مع زملائك فى إعداد جدولٍ تكرارىٍّ لوسيلة المواصلات التى يستخدمها زملاؤك.

وسيلة المواصلات	مترو	حافلة	سيارة خاصة	تاكسى	دراجة	سيرًا على الأقدام	المجموع
التكرار	....	....	....	....	....	....	....

حدِّد الوسيلة الأكثر استخدامًا (المنوال)

1. هل هذه الوسيلةُ مناسبةٌ؟ هل تساعدُ فى علاج ظاهرةِ التكدُّس المرورى؟ لماذا؟
2. ما مقترحاتُك لعلاج هذه الظاهرة فى ضوء ماتوصلت إليه من نتائج؟

تنظيمُ البياناتِ وعرضها فى جداول تكراريَّة



مثال

فيمايلى بيان بالدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالبًا فى إحدى الاختبارات

٧	١٠	٧	٤	٥	٨	٦	٧	١٣	١٢
٢	٩	١١	١٢	١١	٩	١٥	١٢	١٣	٩
٥	١٤	١٩	٣	٩	١٤	٣	١٣	٨	١٧

المطلوب: تكوينُ الجدول التكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات .

الحل

لتكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات نتبع الخطوات التالية:

أولاً: نوجد أكبر قيمة لهذه البياناتَ و أصغر قيمة لها؟

باعتبار مجموعة البيانات السابقة هى سـ

فإن: سـ = {س : ٢ ⩽ س ⩽ ١٩}

أى أن: قيم سـ تبدأمن ٢ وتنتهى عند ١٩

أى أن: المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة = ١٩ - ٢ = ١٧

ثانيًا: تجزَّأ المجموعة سـ إلى عدد من المجموعات الجزئية و المتساوية المدى وليكن ٦ مجموعات.

∴ مدى المجموعة = $\frac{١٧}{٦}$ تقترب من ٣

ثالثًا: تصبح المجموعاتُ الجزئية كالتالى.



المجموعة الأولى	٢ -	المجموعة الثالثة	٨ -	
المجموعة الثانية	٥ -	المجموعة الرابعة	١١ -	وهكذا

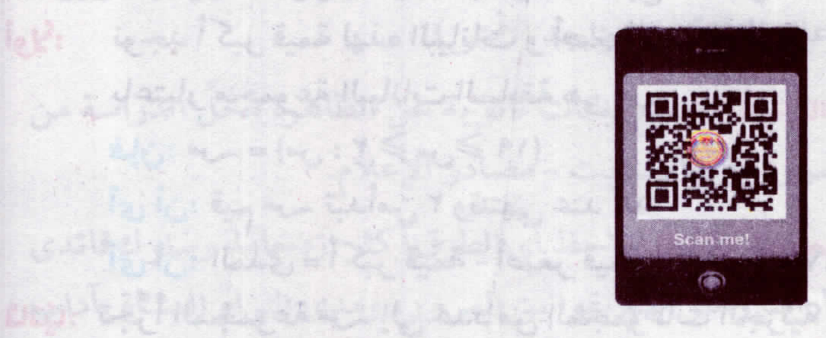
لاحظ أن ٢ - معناها مجموعة البيانات الأكبر من أو تساوى ٢ والأقل من ٥ وهكذا.

رابعًا: تسجل البيانات فى الجدول التالى:

المجموعة	العلامات	التكرار
٢ -	////	٤
٥ -	~~////~~ /	٦
٨ -	~~////~~ //	٧
١١ -	~~////~~ ///	٨
١٤ -	///	٣
١٧ -	//	٢
المجموع		٣٠

خامسًا: يحذف عمود العلامات من الجدول فنحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات، ويمكن كتابته رأسيًا أو أفقيًا والصورة الأفقية للجدول هى كالآتى:

المجموعة	٢ -	٥ -	٨ -	١١ -	١٤ -	١٧ -	المجموع
التكرار	٤	٦	٧	٨	٣	٢	٣٠





الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيلهما بيانيًا

سوف تتعلم

- كيفية تكوين كلٍّ من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل.
- التمثيل البيانى لكلٍّ من الجدول التكرارىّ المتجمع الصاعد والنازل.

المصطلحات الأساسية

- توزيع تكرارى.
- جدول تكرارى .
- جدول تكرارى متجمع صاعد.
- جدول تكرارى متجمع نازل.
- منحنى تكرارى متجمع صاعد.
- منحنى تكرارى متجمع نازل.

فكر وناقش

أولاً: الجدول التكرارىُّ المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيا



مثال

يبين الجدول الآتى التوزيعَ التكرارىَّ لأطوال ١٠٠ تلميذ بالسنتيمترات فى إحدى المدارس:

(مجموعات) الطول بالسنتيمتر	١١٥-	١٢٠-	١٢٥-	١٣٠-	١٣٥-	١٤٠-	١٤٥-	المجموع
عدد التلاميذ (التكرار)	٨	١٢	١٩	٢٣	١٨	١٣	٧	١٠٠

١ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١١٥ سم؟

٢ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٣٥ سم؟

٣ ما عددُ التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٤٥ سم؟

كوِّن الجدولَ التكرارىَّ المتجمعَ الصاعد لهذه البيانات ومثله بيانيًّا

الحل

هل يوجد تلاميذ تقل أطوالهم عن ١١٥ سم؟ **لا**

هل يوجد تلاميذ تقل أطوالهم عن ١٣٥ سم؟ وما عددهم؟ **نعم، ٦٢ تلميذًا.**

كيف توجد عدد التلاميذ الذين تقل أطوالهم عن ١٤٥ سم؟ **نجمع عدد التلاميذ فى مجموعات الطول الأقل من المجموعة ١٤٥**

و الآن للإجابة عن التساؤلات السابقة بطريقةٍ أكثر سهولة نكون الجدولَ التكرارىَّ المتجمعَ الصاعدَ ، وذلك كالتالى:

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١١٥	٠
أقل من ١٢٠	٠ + ٨ = ٨
أقل من ١٢٥	٨ + ١٢ = ٢٠
أقل من ١٣٠	٢٠ + ١٩ = ٣٩
أقل من ١٣٥	٣٩ + ٢٣ = ٦٢
أقل من ١٤٠	٦٢ + ١٨ = ٨٠
أقل من ١٤٥	٨٠ + ١٣ = ٩٣
أقل من ١٥٠	٩٣ + ٧ = ١٠٠

أى

جدول التكرار المتجمع الصاعد

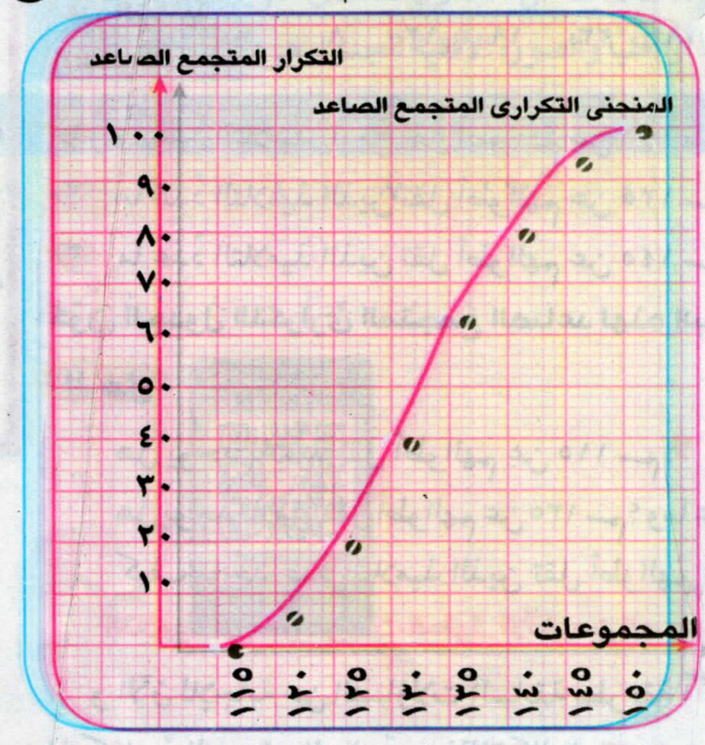
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١١٥	صفر
أقل من ١٢٠	٨
أقل من ١٢٥	٢٠
أقل من ١٣٠	٣٩
أقل من ١٣٥	٦٢
أقل من ١٤٠	٨٠
أقل من ١٤٥	٩٣
أقل من ١٥٠	١٠٠

ولتمثيل الجداولِ التكراريِّ المتجمِع الصّاعد بيانيًا:

١ نخصص المحور الأفقىَّ للمجموعاتِ والمحورَ الرأسىَّ للتَّكرار المتجمع الصاعد.

٢ نختار مقياسًا للرسم على المحور الرأسى بحيث يتسع المحورُ للتكرارِ الكلى المتجمع الصاعد عدد عناصر المجموعة.

٣ نمثل التكرارَ المتجمعَ الصاعد لكل مجموعة ونرسم الخط البيانى لها بالتتابع.



ثانيا الجدولُ التكرارىُّ المتجمعُ النازل وتمثيله بيانيا :

من التوزيع التكرارى السابق ، والذى يبين أطوال ١٠٠ طالب بالسنتيمترات فى إحدى المدارس.

أوجد: عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٥٠سم فأكثر.

عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٤٠سم فأكثر.

عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٢٥سم فأكثر.

كوِّن الجدول التكرارى المتجمع النازل، ثم مثله بيانيًا.

الحل

لايوجد تلاميذ أطوالهم ١٥٠سم فأكثر.

عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٤٠سم فأكثر هو ٧ + ١٣ = ٢٠ طالبًا

عدد التلاميذ الذين أطوالهم ١٢٥سم فأكثر هو

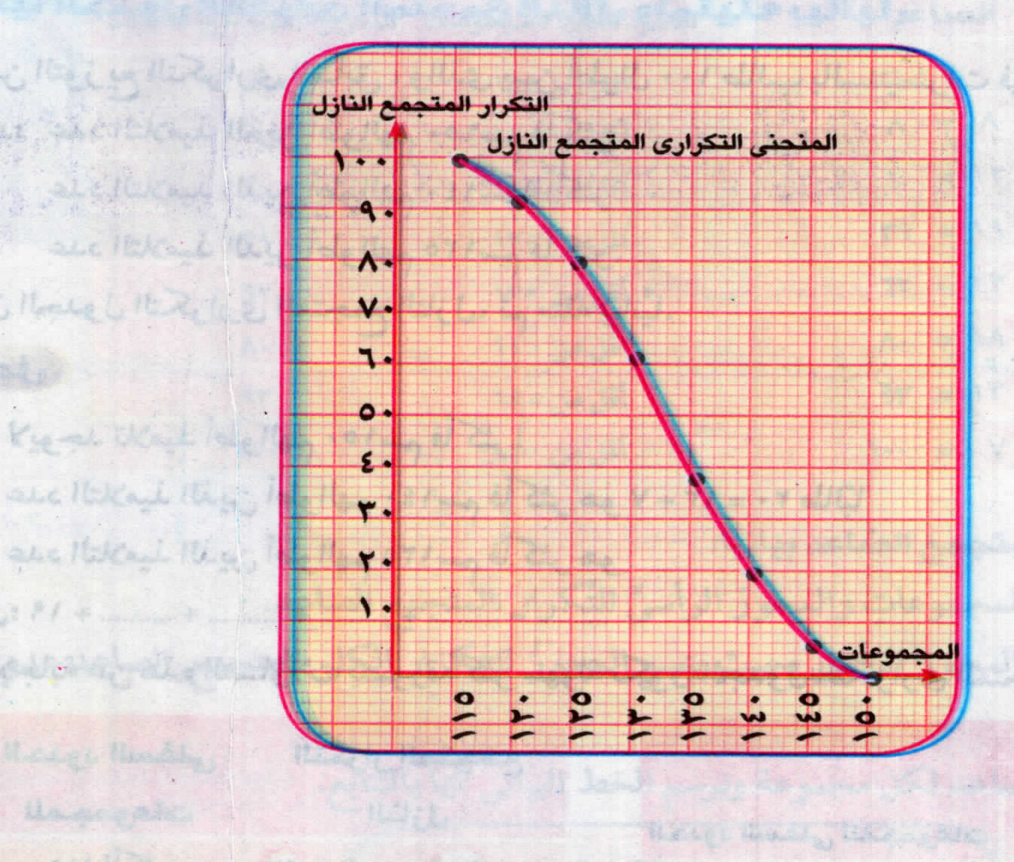
أكمل: ١٩ + ... + ... + ... + ... = ...

للإجابة عن هذه التساؤلات بصورة أكثر سهولة نكون الجدول التكرارى المتجمع النازل كالآتى:

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١١٥ فأكثر	٩٢ + ٨ = ١٠٠
١٢٠ فأكثر	٨٠ + ١٢ = ٩٢
١٢٥ فأكثر	٦١ + ١٩ = ٨٠
١٣٠ فأكثر	٣٨ + ٢٣ = ٦١
١٣٥ فأكثر	٢٠ + ١٨ = ٣٨
١٤٠ فأكثر	٧ + ١٣ = ٢٠
١٤٥ فأكثر	٠ + ٧ = ٧
١٥٠ فأكثر	٠

جدول التكرار المتجمع النازل	
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
١١٥ فأكثر	١٠٠
١٢٠ فأكثر	٩٢
١٢٥ فأكثر	٨٠
١٣٠ فأكثر	٦١
١٣٥ فأكثر	٣٨
١٤٠ فأكثر	٢٠
١٤٥ فأكثر	٧
١٥٠ فأكثر	صفر

ولتمثيل هذا الجدول بيانيًا نتبع نفس خطوات تمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ، وذلك لنحصل على التمثيل البيانى التالى:





الجدول الآتى يمثل التوزيع التكرارى لأعمار ٥٠ عاملا بأحد المطابع :

المجموعات	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ -	٤٥ -	٥٠ -
التكرار	٦	٧	١٠	....	٩	٣	٥

المطلوب:

أ أكمل الجدول.

ب ارسم فى شكل واحد المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والمنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع.

جـ من الرسم أوجد :

أولا : عدد العمال الذين أعمارهم أكبر من ٣٥ سنة.

ثانيا : عدد العمال الذين أعمارهم أصغر من ٤٥ سنة.

Scan me!



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكترونى



الوسط الحسابى - الوسيط - المنوال

فكر وناقش

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد الوسط الحسابى من جدولٍ تكرارىٍّ ذى مجموعات
- كيفية حساب الوسيط من جدولٍ تكرارى ذى مجموعات.
- كيفية حساب المنوال من جدولٍ تكرارى ذى مجموعات.

المصطلحات الأساسية

- وسط حسابى.
- وسيط.
- مدرج تكرارى.
- منوال.

أولاً: الوسطُ الحسابىُّ

سبق أن درستَ كيفية إيجاد الوسط الحسابى لمجموعة من القيم وعلمت أن:

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$$

فمثلاً: إذا كان أعمار ٥ تلاميذ هى ١٣، ١٥، ١٦، ١٤، ١٧ سنة فإن:

الوسط الحسابى لأعمارهم $= \frac{١٣+١٥+١٦+١٤+١٧}{٥}$

$= \frac{٧٥}{٥} = ١٥$ سنة

لاحظ أن: ١٥ × ٥ = ١٣ + ١٥ + ١٦ + ١٤ + ١٧

الوسطُ الحسابىُ: هو أبسطُ المتوسطات جميعًا ، وأكثرها تداولًا ، وهو القيمة التى لو أعطيت لكلٍّ مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية، ويمكن حسابه بجمع قيم المفردات كلها ثم نقسم على عدد المفردات.

إيجادُ الوسط الحسابى لبيانات من جداول تكرارية ذات مجموعات:

كيف يمكن إيجاد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعات	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -	المجموع
التكرار	١٠	٢٠	٢٥	٣٠	١٥	١٠٠

لاحظ: لإيجاد الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات نتبع الخطوات التالية:

١ نحدد مراكزَ المجموعات:

مركز المجموعة الأولى = $\frac{١٠ + ٢٠}{٢}$ = ١٥ . مركز المجموعة الثانية = $\frac{٢٠ + ٣٠}{٢}$ = ٢٥ ... وهكذا

ونظرًا لأن مدى المجموعات الجزئية متساو، وكل منها = ١٠

نعتبر الحدَّ الأعلى للمجموعة الأخيرة = ٦٠ فيكون:

مركزها = $\frac{٥٠ + ٦٠}{٢}$ = ٥٥

٢ نكون الجدولَ الرأسى الآتى:

المجموعة	مركز المجموعة م	التكرار ك	مركزالمجموعة م × التكرار ك
١٠ -	١٥	١٠	١٥٠
٢٠ -	٢٥	٢٠	٥٠٠
٣٠ -	٣٥	٢٥	٨٧٥
٤٠ -	٤٥	٣٠	١٣٥٠
٥٠ -	٥٥	١٥	٨٢٥
المجموع		١٠٠	٣٧٠٠

٣ الوسطُ الحسابىُّ = $\frac{\text{مجموع (ك × م)}}{\text{مجموع ك}}$

= $\frac{٣٧٠٠}{١٠٠}$ = ٣٧



١ إذا كان الوسطُ الحسابىُّ لدرجات تلميذ فى الخمسة أشهر الأولى هى ٢٣,٨ فما الدرجة التى يجب أن يحصل عليها فى الشهر السادس ليكون الوسط الحسابى لدرجاته ٢٤ درجة؟

٢ فيما يلى التوزيع التكرارى لأوزان ٣٠ طفلًا بالكيلوجرامات.

الوزن بالكيلو جرام	٦ -	١٠ -	١٤ -	١٨ -	٢٢ -	٢٦ -	٣٠ -	المجموع
التكرار	٢	٣	....	٨	٦	٤	٢	٣٠

أكمل الجدول ثم أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

ثانيًا: الوسيط

هو القيمةُ التى تتوسط مجموعةَ المفردات بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا بحيث يكون عددُ القيم الأصغر منها مساويًا لعددِ القيم الأكبر منها.

إيجادُ الوسيط لتوزيعٍ تكرارىٍّ ذى المجموعات بيانيًا:

١ ننشأ الجدولَ التكرارىَّ المتجمعَ الصاعدَ أو النازل ، ثم نرسُم المنحنى التّكرارى المتجمع له.

٢ نحدّد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$.

٣ نحدِّد النقطة أ على المحور الرأسى(التكرار) والتى تمثِّل ترتيب الوسيط.

٤ نرسمُ مستقيمًا أفقيًا من نقطة أ فيقطع المنحنى فى نقطة نرسم منها عمودًا على المحور الأفقى ؛ ليقطعه فى نقطة تمثل الوسيط.



مثال ١

التوزيعُ التكرارىُّ الآتى يبين درجات ٦٠ طالبًا فى أحد الاختبارات

المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦	المجموع
التكرار	٦	٩	١٢	١٥	١٠	٥	٣	٦٠

أوجد الوسيطَ لهذا التوزيع مستخدمًا جدول التّكرار المتجمع الصّاعد.

الحل

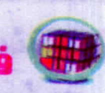
١ ننشئ الجدولَ التكرارىَّ المتجمعَ الصاعد.   ٢ نوجد ترتيب الوسيط = $\frac{٦٠}{٢٠}$ = ٣٠

٣ نرسم المنحنى التّكرارى المتجمعَ الصاعد ومن الرسم نوجد الوسيط.

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢	صفر
أقل من ٦	٦
أقل من ١٠	١٥
أقل من ١٤	٢٧
أقل من ١٨	٤٢
أقل من ٢٢	٥٢
أقل من ٢٦	٥٧
أقل من ٣٠	٦٠

من الرسم الوسيط = ١٤,٨ من الدرجة





فكر هل يمكنك إيجادُ الوسيط باستخدام الجدول التكرارى المتجمع النازل؟

هل تختلف قيمة الوسيط فى هذه الحالة.

مثال ٢

التوزيعُ التكرارى الآتى يبين الأجر اليومى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع.

الأجر بالجنيه (المجموعات)	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	المجموع
عدد العمال (التكرار)	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

المطلوب:

١ رسم المنحنيين المتجمع الصاعد والنازل لهذا التوزيع معًا.

٢ هل يمكن إيجادُ الأجر الوسيط من هذا المنحنى؟

الحل

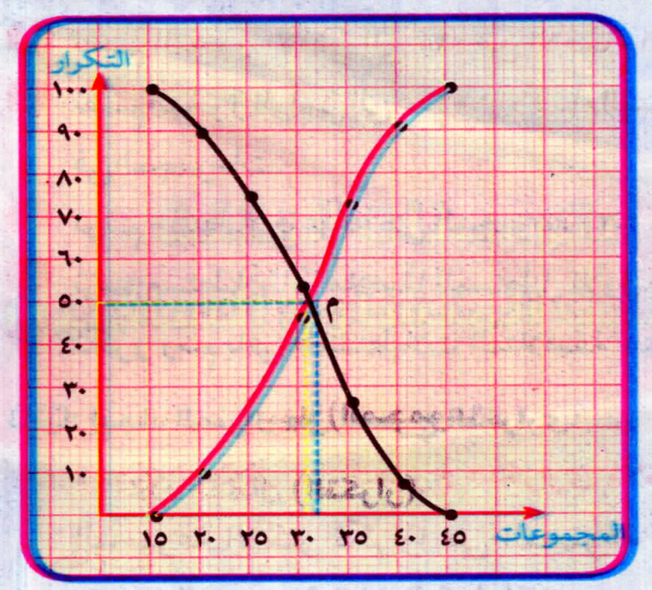
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع
أقل من ١٥	صفر
أقل من ٢٠	١٠
أقل من ٢٥	٢٥
أقل من ٣٠	٤٧
أقل من ٣٥	٧٢
أقل من ٤٠	٩٢
أقل من ٤٥	١٠٠

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع
١٥ فأكثر	١٠٠
٢٠ فأكثر	٩٠
٢٥ فأكثر	٧٥
٣٠ فأكثر	٥٣
٣٥ فأكثر	٢٨
٤٠ فأكثر	٨
٤٥ فأكثر	صفر

لاحظ أن:

المنحنى التكرارى المتجمعُ الصاعُد يتقاطعُ مع المنحنى التّكرارى المتجمع النازل فى نقطة واحدة هى نقطة م .





الإحداثى الرأسى لنقطة م $= ٥٠$

$= \frac{١٠٠}{٢}$

= ترتيب الوسيط

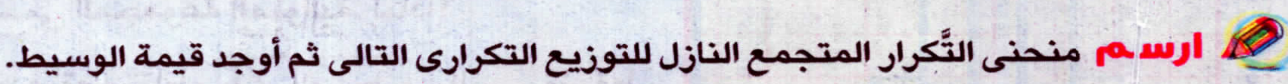
∴ الإحداثىُّ الأفقىُّ لنقطةِ م يعين الوسيط

كل ١٠مم من المحور الأفقى تمثل ٥ جنيهات

أكمل ٢ مم تمثل ....

الأجر الوسيط $= ٣٠ + \frac{٢ \times ٥}{١٠} = ٣١$ جنيهًا.





ارسم منحنى التَّكرار المتجمع النازل للتوزيع التكرارى التالى ثم أوجد قيمة الوسيط.

المجموعات	٥ -	١٠ -	١٥ -	٢٠ -	٢٥ -	٣٠ -	المجموع
التكرار	٤	٦	١٠	١٧	١٠	٣	٥٠

ثالثًا: المنوال

هو القيمةُ الأكثرُ شيوعًا فى مجموعة المفردات أى القيمة التى تتكرَّر أكثر من غيرها من القيم.



الجدولُ الآتى يبين التَّوزيعَ التكراريَّ لدرجات ٤٠ تلميذًا فى أحد الاختبارات.

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-
التكرار	٣	٥	٨	١٠	٧	٥	٢

أوجد المنوالَ لهذا التَّوزيع بيانيًّا.

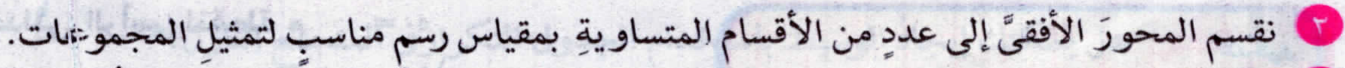
الحل

يمكن إيجادُ المنوال لهذا التوزيع بيانيًّا باستخدام المدرِج التكراريِّ ، وذلك كالآتى:

أولاً: ارسم المدرج التكراريَّ

١ نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقيًا لتمثيل المجموعات، والآخر رأسيًّا لتمثيل تكرارِ كلِّ مجموعة.





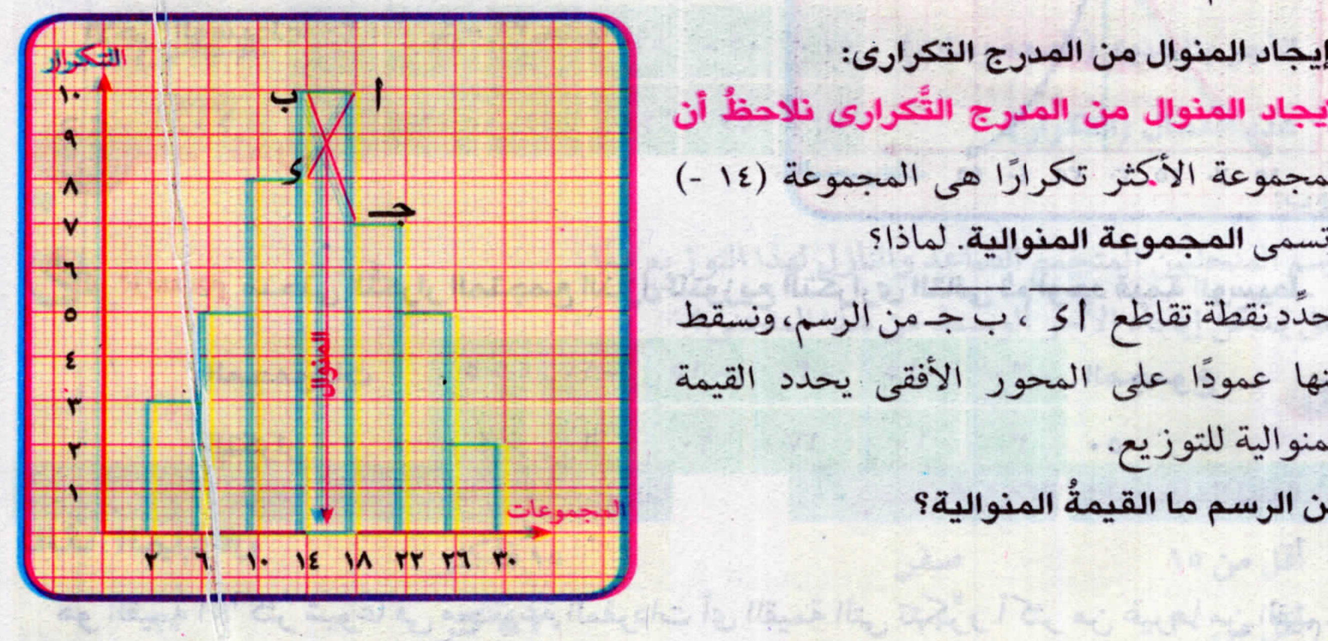
٢ نقسم المحورَ الأفقىَّ إلى عددٍ من الأقسام المتساويةِ بمقياس رسمٍ مناسبٍ لتمثيلِ المجموعات.

٣ نقسم المحورَ الرأسىَّ إلى عددٍ من الأقسامِ المتساوية بمقياسِ رسمٍ مناسبٍ بحيث يمكن تمثيلُ أكبر تكرارٍ فى المجموعات.

٤ نرسم مستطيلًا قاعدته هى المجموعة (٢-) وارتفاعه يساوى التكرار (٣).

٥ نرسم مستطيلاً ثانيًا ملاصقًا للمستطيل الأول قاعدته هى المجموعة (٦-) وارتفاعه يساوى التكرار (٥).

٦ نكرِّر رسم باقى المستطيلات المتلاصقة حتى آخر مجموعة (٢٦-).



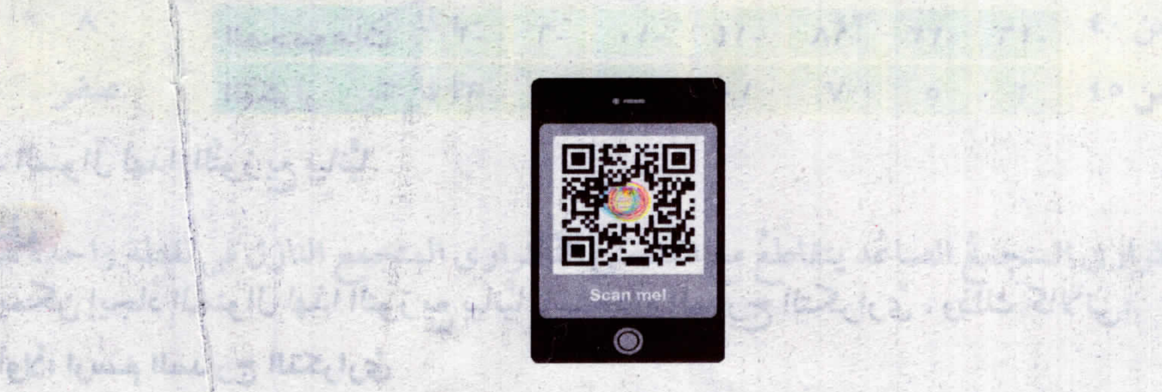
ثانيًا: إيجاد المنوال من المدرج التكرارى:

لإيجاد المنوال من المدرج التَّكرارى نلاحظُ أن

المجموعة الأكثر تكرارًا هى المجموعة (١٤ -) وتسمى **المجموعة المنوالية**. لماذا؟

نحدِّد نقطة تقاطع $\overline{\text{اى}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ من الرسم، ونسقط منها عمودًا على المحور الأفقى يحدد القيمة المنوالية للتوزيع.

من الرسم ما القيمةُ المنواليةُ؟

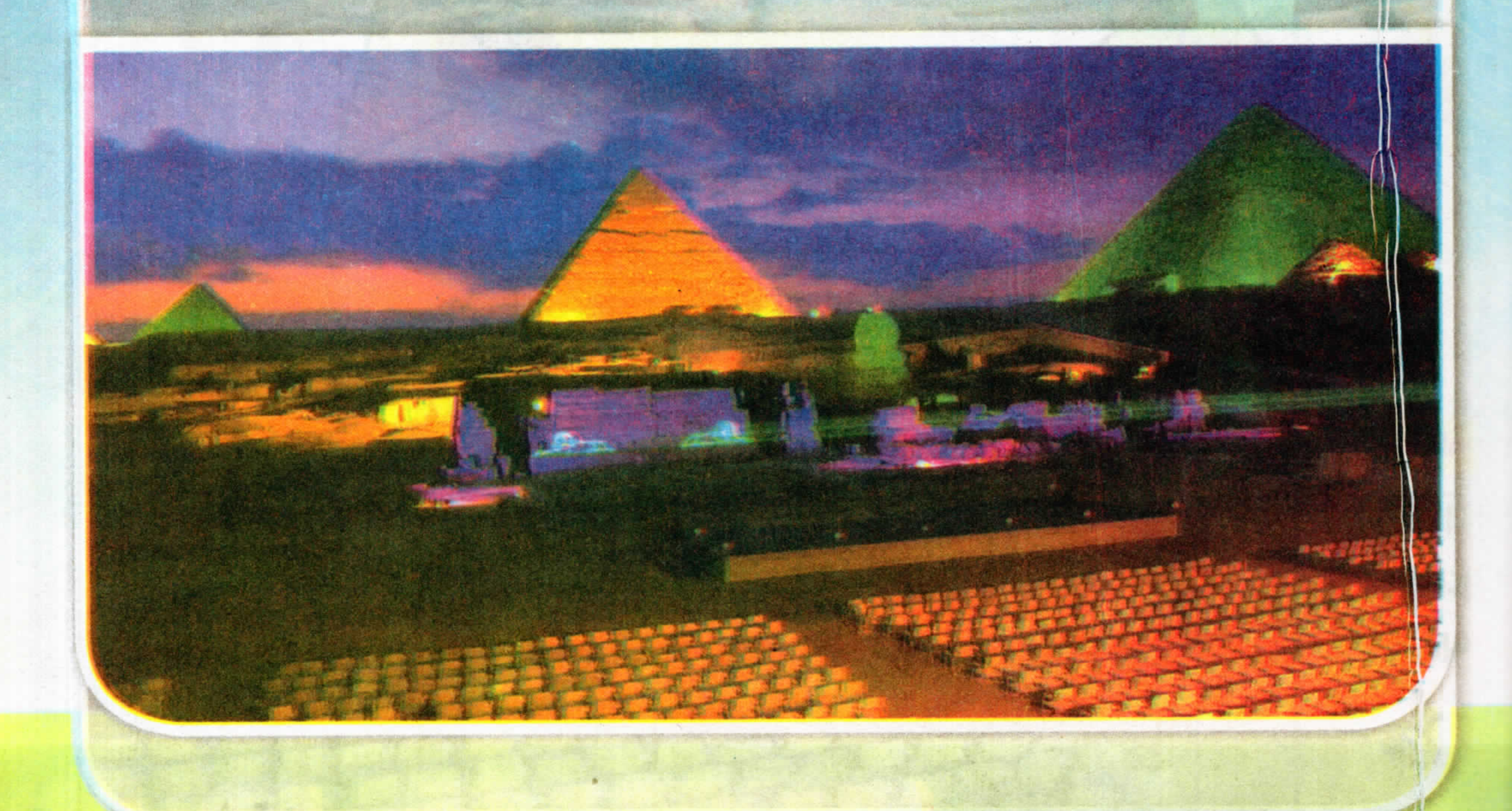


لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

الوحدة الرابعة

٤

متوسطات المثلث والمثلث المتساوي الساقين



الوحدة الرابعة

الدرس الأول

متوسطات المثلث

فكر وناقش

سوف تتعلم

- متوسطات المثلث
- المثلث الثلاثينى الستينى.

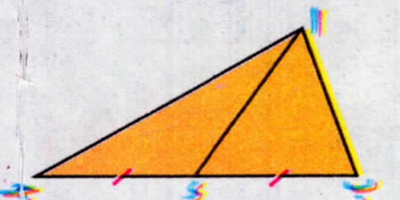
المصطلحات الأساسية

- متوسط للمثلث.
- مثلث ثلاثينى ستينى

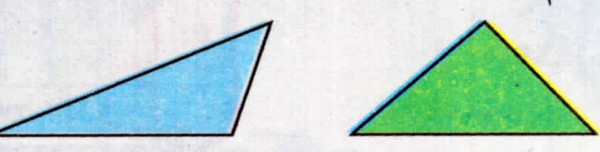
متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلث، الى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.

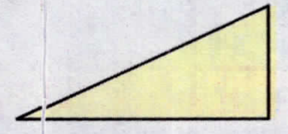
فى △ أ ب جـ: ∵ ى منتصف ب جـ

فيكون أ ى متوسط للمثلث

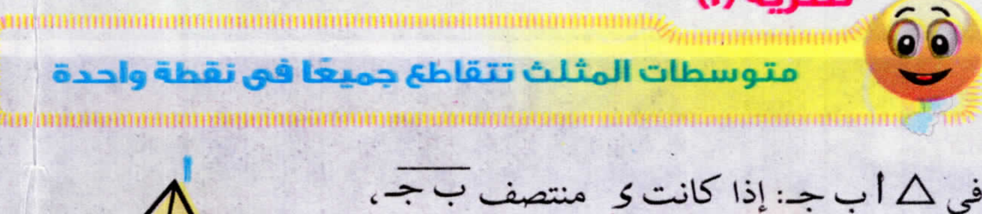


- ماعدد متوسطات أى مثلث؟
- ارسم المتوسطات فى كل من المثلثات التالية:



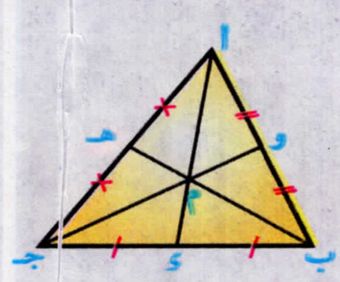


نظرية (١)



فى △ أ ب جـ: إذا كانت ى منتصف ب جـ، هـ منتصف أ جـ، و منتصف أ ب .

فإن: أ ى ، ب هـ، جـ و تتقاطع فى نقطة واحدة.



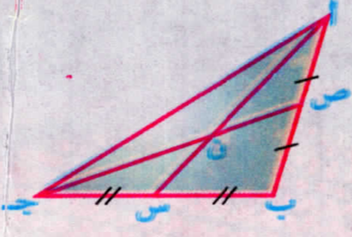


فى الشكل المقابل:



أ ب جـ مثلث فيه س منتصف ب جـ ،

ص منتصف أ ب ، أ س ∩ جـ ص = {ن}.



١ ارسم $\overleftarrow{\text{ب ن}}$ ليقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى ع،
أوجد بالقياس طول $\overline{\text{أ ع}}$ ، طول $\overline{\text{جـ ع}}$.
هل أ ع = جـ ع؟ فسر إجابتك؟

٢ قس الأطوال ثم أكمل:

$$\frac{\text{ن س}}{\text{ن أ}} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......} \text{ ، } \frac{\text{ن ص}}{\text{ن جـ}} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......} \text{ ، } \frac{\text{ن ع}}{\text{ن ب}} = \frac{......}{......} = \frac{......}{......}$$

إذا كانت قياساتك دقيقة فإن $\frac{\text{ن س}}{\text{ن أ}} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ن ص}}{\text{ن جـ}} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ن ع}}{\text{ن ب}} = \frac{1}{2}$



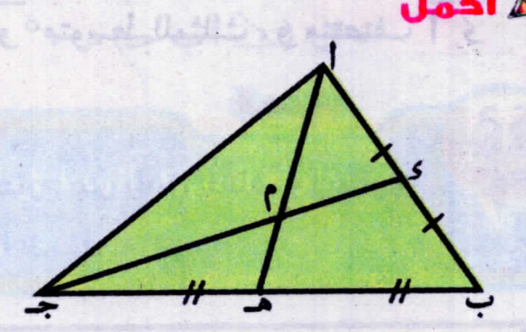
نظرية (٢)

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة أو بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

تدرب

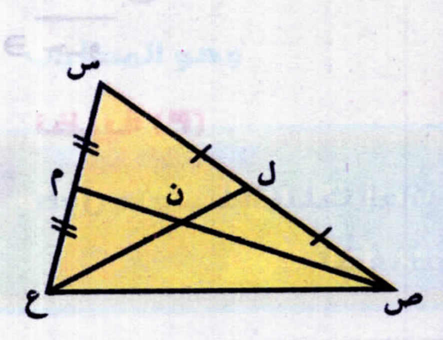
أكمل

١



م هـ = ٣سم ، م جـ = ٨سم
م أ = ... ، م ء = ...
م هـ = ... أ هـ ، م جـ = ... جـ ء

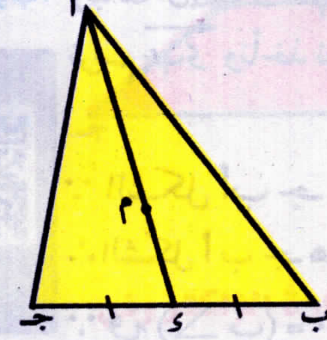
٢



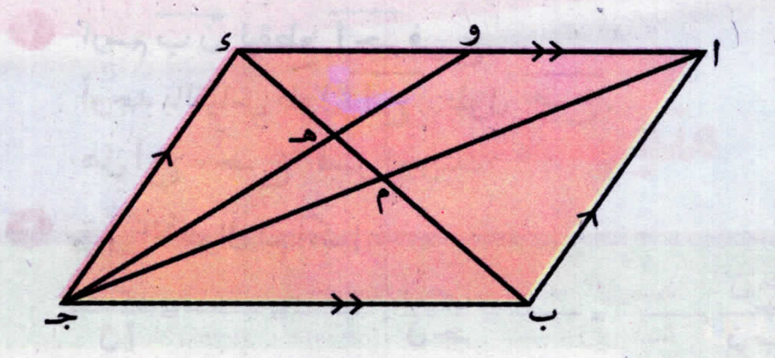
ل ع = ١٥سم ، ص م = ١٨سم ، س ص = ٢٠ سم
ن ل = ... ، ن ص = ...
محيط △ ن ل ص = ...

حقيقة

$\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى △ أ ب جـ ، م ∋ $\overline{\text{أ ء}}$.
إذا كان: أ م = ٢ م ء
فإن: م تكون نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ .



مثال (١)



في الشكل المقابل:

ا ب جـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م،

هـ ∈ $\overline{\text{ء م}}$ حيث ء هـ = ٢ هـ م،

رسم $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ فقطع $\overline{\text{ا ء}}$ في و.

أثبت أن: ا و = و ء

البرهان: في ▱ ا ب جـ ء

∵ $\overline{\text{ا جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ء}}$ = {م} ∴ م منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$

في △ ء ا جـ

∵ م منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ء م}}$ متوسط للمثلث

∵ هـ ∈ $\overline{\text{ء م}}$ ، ء هـ = ٢ هـ م

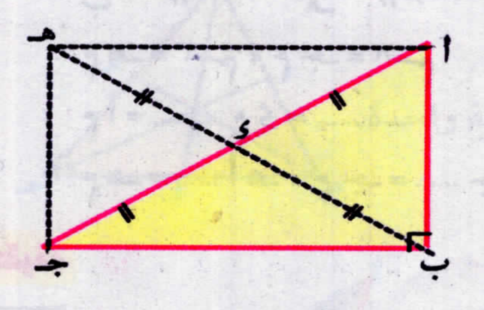
∴ هـ نقطة تقاطع متوسطات المثلث

∵ هـ ∈ $\overline{\text{جـ و}}$ ∴ $\overline{\text{جـ و}}$ متوسط للمثلث ، و منتصف $\overline{\text{ا ء}}$

نظرية (٣)



طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول وتر هذا المثلث



المعطيات: ا ب جـ مثلث فيه ق (∠ ب) = ٩٠°

$\overline{\text{ب ء}}$ متوسط في △ ا ب جـ

المطلوب: إثبات أن: ب ء = $\frac{1}{2}$ ا جـ

العمل: نرسم $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ونأخذ نقطة هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ بحيث ب ء = ء هـ

البرهان:

∵ الشكل ا ب جـ هـ فيه $\overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل ا ب جـ هـ متوازي أضلاع

∵ ق (∠ ب) = ٩٠° ∴ الشكل ا ب جـ هـ مستطيل



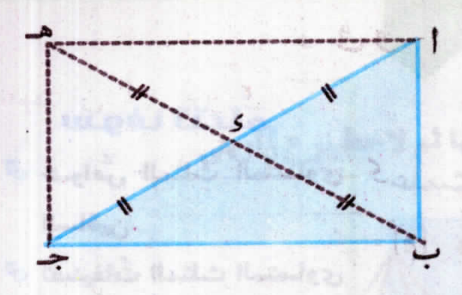
∴ ب هـ = ا جـ

∵ ب ى = $\frac{1}{2}$ ب هـ ∴ ب ى = $\frac{1}{2}$ ا جـ وهو المطلوب

عكس نظرية ٣



إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



المعطيات: ا ب جـ مثلث، $\overline{\text{ب ى}}$ متوسط ، ى ا = ى ب = ى جـ

المطلوب: إثبات أن ق (∠ ا ب جـ) = ٩٠°

العمل: نرسم $\overrightarrow{\text{ب ى}}$ ونأخذ نقطة هـ ∈ $\overrightarrow{\text{ب ى}}$ بحيث ب ى = ى هـ

البرهان:

∵ ب ى = $\frac{1}{2}$ ب هـ = $\frac{1}{2}$ ا جـ

∴ ب هـ = ا جـ

∵ الشكل ا ب جـ هـ فيه $\overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متساويان فى الطول وينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل ا ب جـ هـ مستطيل

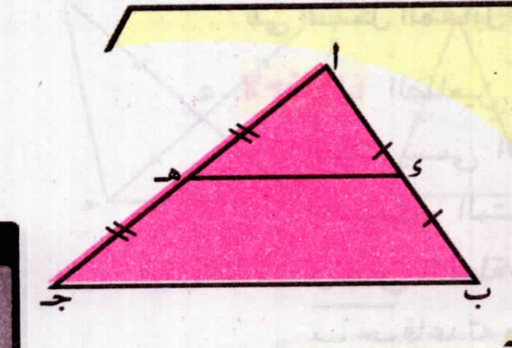
∴ ق (∠ ا ب جـ) = ٩٠° وهو المطلوب

نتيجة



طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر

تذكر أن



فى المثلث ا ب جـ إذا كانت ى منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$ فإن

١ ى هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

٢ $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

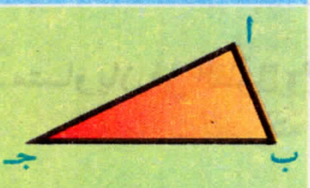
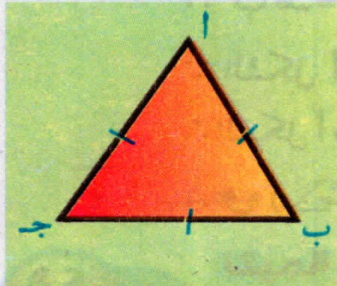
الوحدة الرابعة
الدرس الثانى
المثلث المتساوى الساقين

سوف تتعلم
- خواصُّ المثلثِ المتساوى الساقين.
- تصنيفاتُ المثلث المتساوى الساقين.

المصطلحات الأساسية
- مثلث متساوى الساقين.
- مثلث متساوى الأضلاع.
- مثلث مختلف الأضلاع.

فكّر وناقش

علمت أن المثلثاتِ تصنَّف حسب أطوالِ أضلاعها إلى ثلاثة أنواع:

مثلث مختلف الأضلاع	مثلث متساوى الساقين (متطابق الضلعين)	مثلث متساوى الأضلاع (متطابق الأضلاع)
	ا ، ب ، جـ	
ا ب ≠ ب جـ ا ب ≠ ا جـ ب جـ ≠ ا جـ	ا ب = ا جـ	ا ب = ا جـ = ب جـ

فى الشَّكل المقابل:

لاحظ أن: الضلعين $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا جـ}}$ متطابقان (متساويان فى الطول).

لذلك يسمى المثلث ا ب جـ بالمثلث المتساوى الساقين وتسمى النقطة ا رأس المثلث، $\overline{\text{ب جـ}}$ قاعدته والزاويتان ب، جـ زاويتا قاعدة المثلث

ا ، ساق ، ساق ، ب ، جـ ، قاعدة

خواصُ المثلثِ المتساوى الساقين

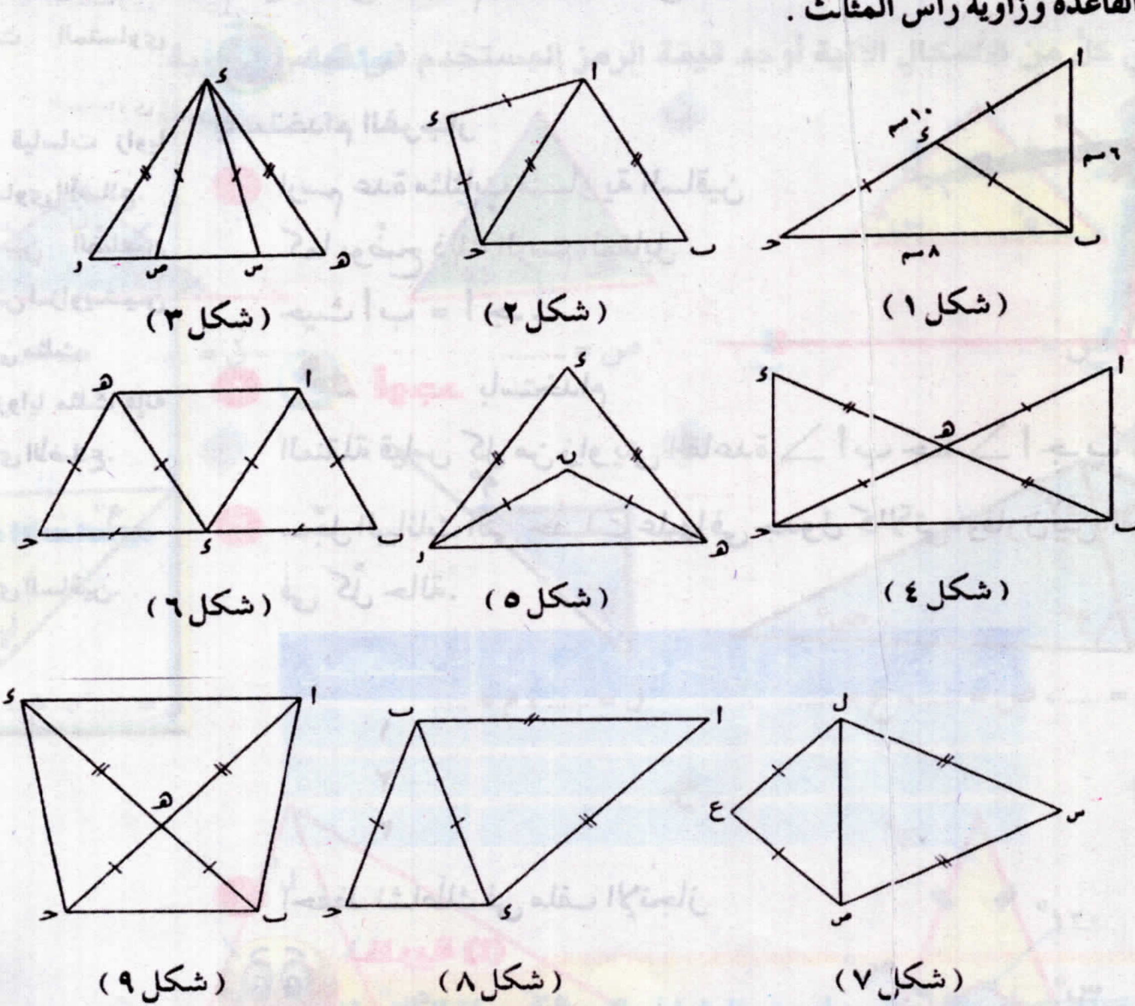


فى أىِّ مثلثٍ متساوى الساقين:

- مانوع كل من زاويتى القاعدة؟ (حادة - قائمة - منفرجة)
- مانوع زاوية الرأس؟

مثال

فى كل من الأشكال الآتية اذكر المثلثات المتساوية الساقين وحدد قاعدتها ثم لاحظ نوع زاويتى القاعدة وزاوية رأس المثلث .







ناقِشْ مع معلمك فى الحل

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

الوحدة الرابعة

الدرس الثالث

نظريات المثلَّث المتساوى السّاقين

فكّر وناقش

سوف تتعلَّم

- العَلاقة بين زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين.
- العلاقة بين قياسات زوايا المثلَّث المتساوى الأضلاع.
- العَلاقة بين الضِّلعين المقابلين لزاويتين متساويتين فى مثلث.
- إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع.

المصطلحات الأساسية

- مثلث متساوى الساقين.
- زاويتا القاعدة.

هل توجد عَلاقةٌ بين قياسِ زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين؟

للتعرُّف على ذلك قم بالنشاط التالى:



نشاط

باستخدام الفرجار

١ ارسم عدة مثلثاتٍ متساوية الساقين كما يوضِّح ذلك الرسم المقابل حيث أ ب = أ جـ.

٢ **أوجد** باستخدام المنقلة قياس كل من زاويتى القاعدة ∠ أ ب جـ، ∠ أ جـ ب.

٣ سجِّل البيانات التى حصلت عليها فى جدول كالآتى، وقارن بين القياسات فى كلٍّ حالة.

رقم المثلث	ق (∠ أ ب جـ)	ق (∠ أ جـ ب)
١		
٢		
٣		

٤ احفظ نشاطَك فى ملف الإنجاز



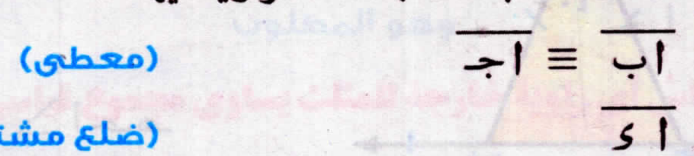
نظرية (١)

زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان

المعطيات : أ ب جـ مثلث فيه $\overline{أب} \equiv \overline{أجـ}$

المطلوب : إثبات ان ∠ ب ≡ ∠ جـ

العمل : نرسم $\overline{أ ى} \perp \overline{ب جـ}$



البرهان : المثلثان ا ى ب، ا ى جـ قائما الزاوية فيهما

$\overline{أ ب} \equiv \overline{أ جـ}$ (معطى)

$\overline{أ ى}$ (ضلع مشترك)

$\therefore \triangle$ ا ى ب $\equiv \triangle$ ا ى جـ (وتر و ضلع)

وينتج من التَّطابق أن $\angle$ ب $\equiv \angle$ جـ وهو المطلوب

تدرب

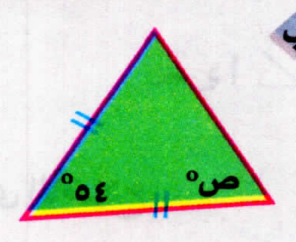
١ فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية أوجد قيمَة الرمز المستخدم فى قياس الزاوية:

أ



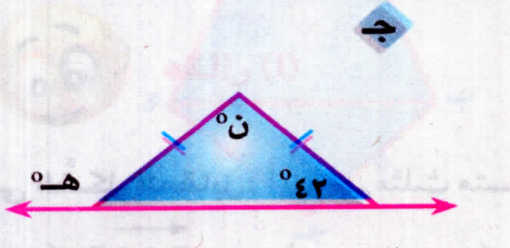
س = ...

ب



ص = ...

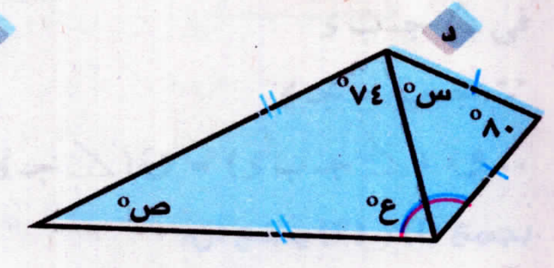
جـ





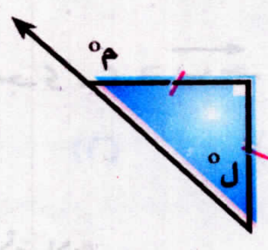
ن = ... هـ = ...

د



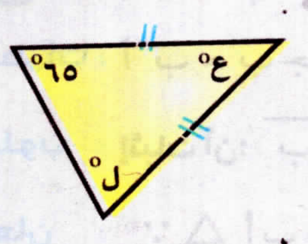
س = ... ، ص = ... ، ع = ...

هـ



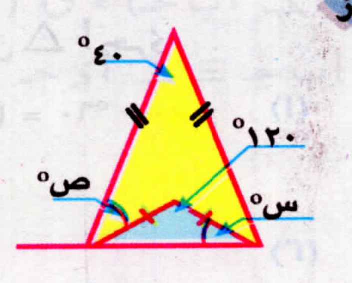
ل = ... ، م = ...

و



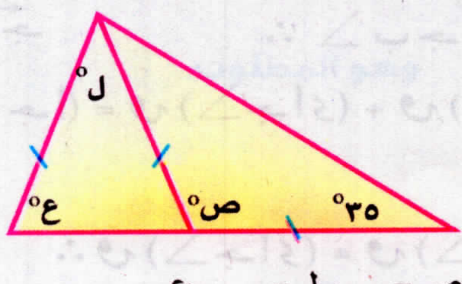
ل = ... ، ع = ...

ز

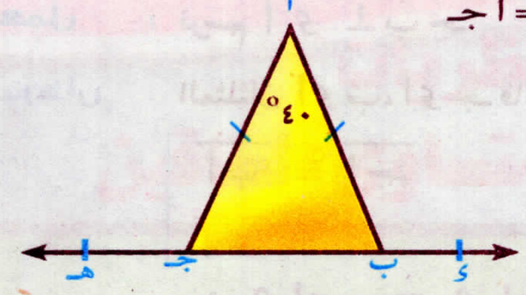


س = ... ، ص = ...

ح



ص = ... ، ل = ... ، ع = ...

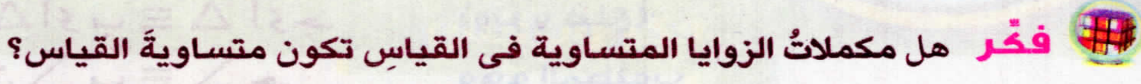


٢ فى الشكلِ المقابل ا ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا جـ

و (∠ ا) = ٤٠°، ى ∈ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

أولاً: **أوجد** و (∠ ا ب جـ)

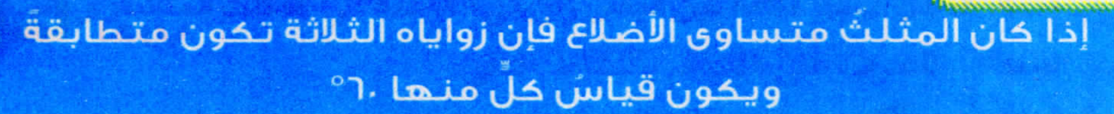
ثانيًا: **اثبت أن** ∠ ا ب ى ≡ ∠ ا جـ هـ



فكّر هل مكملاتُ الزوايا المتساوية فى القياسِ تكون متساويةَ القياس؟

نتيجة





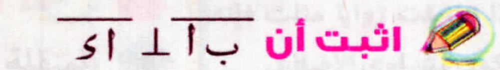
إذا كان المثلثُ متساوى الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقةً ويكون قياسُ كلٍّ منها ٦٠°



مثال (١)

فى الشّكل المقابل: ا ب جـ مثلث متساوى الأضلاع.

ى ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ بحيث ب جـ = جـ ى .



اثبت أن $\overline{\text{ب ا}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ى}}$

المعطيات : ا ب = ب جـ = جـ ا = جـ ى ، ى ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

المطلوب : **إثبات أن:** $\overline{\text{ب ا}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ى}}$

البرهان : ∵ △ ا ب جـ متساوى الأضلاع .

∴ و (∠ ا جـ ب) = و (∠ ب ا جـ) = و (∠ ب) = ٦٠° نتيجة

∵ ى ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ∴ ∠ ب جـ ا خارجة عن △ ا جـ ى

و (∠ ب جـ ا) = و (∠ جـ ا ى) + و (∠ جـ ى ا) = ٦٠° (١)

فى △ ا جـ ى

∵ جـ ا = جـ ى ∴ و (∠ جـ ا ى) = و (∠ جـ ى ا) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: و (∠ جـ ا ى) = و (∠ جـ ى ا) = ٣٠°

∵ ق (∠ ب ا ى) = ق (∠ ب ا جـ) + ق (∠ جـ ا ى)

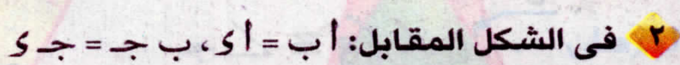
∴ ق (∠ ب ا ى) = ٦٠° + ٣٠° = ٩٠°

∴ $\overline{\text{ب ا}} \perp \overline{\text{ا ى}}$ وهو المطلوب

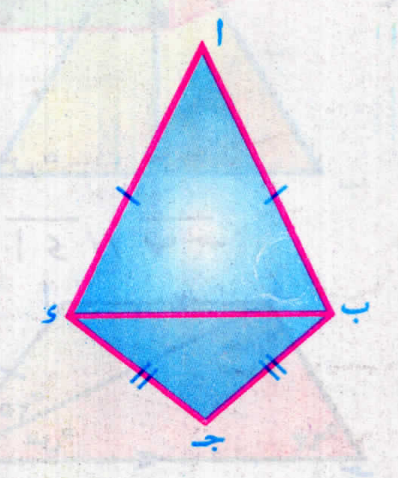
لاحظ أن: قياسُ أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها.

مثال

٢ فى الشكل المقابل: ا ب = ا ى ، ب جـ = جـ ى



اثبت أن ∠ ا ب جـ ≡ ∠ ا ى جـ



المعطيات : ا ب = ا ى ، ب جـ = جـ ى

المطلوب : إثبات أن ∠ ا ب جـ ≡ ∠ ا ى جـ

البرهان : فى △ ا ب ى

∵ ا ب = ا ى

∴ ق (∠ ا ب ى) = ق (∠ ا ى ب) (١)

فى △ جـ ب ى

∵ جـ ب = جـ ى

∴ ق (∠ جـ ب ى) = ق (∠ جـ ى ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن:

ق (∠ ا ب ى) + ق (∠ جـ ب ى) = ق (∠ ا ى ب) + ق (∠ جـ ى ب)

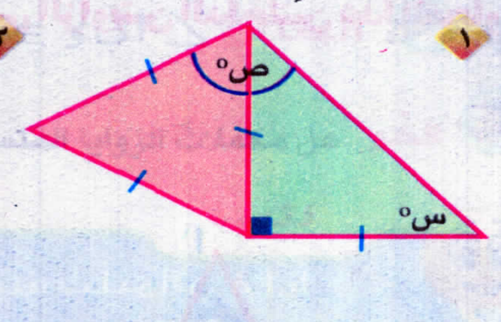
∴ ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ ا ى جـ)

∴ ∠ ا ب جـ ≡ ∠ ا ى جـ وهو المطلوب.

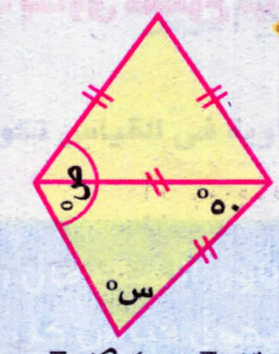


تدرب

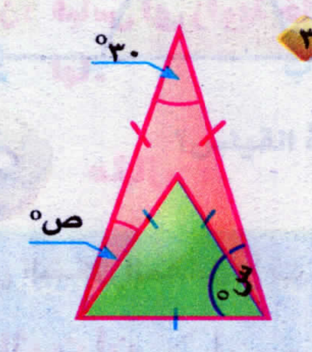
فى كلٍّ من الأشكالِ الآتية أوجد قيمةَ الرمز المستخدم لقياس الزاوية:

١ 

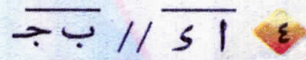
س = ... ، ص = ...

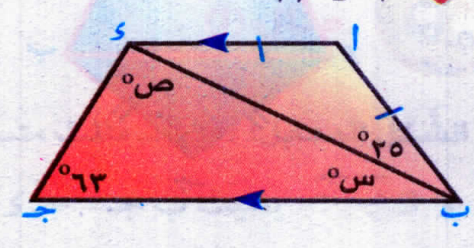
٢ 

س = ... ، ص = ...

٣ 

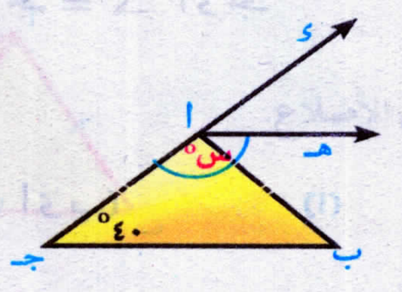
س = ... ، ص = ...

٤  أ ء // ب جـ



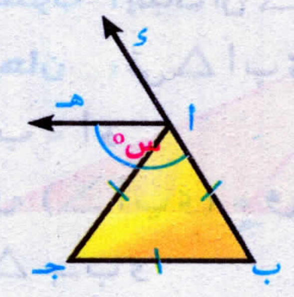
س = ... ، ص = ...

٥ أ هـ // ب جـ



س = ...

٦ أ هـ منصف ∠ جـ أ ء



س = ...

نشاط ارسم المثلث أ ب جـ فيه ب جـ = ٧ سم، ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) = ٥٠° ثم قس طول كل من أ ب ، أ جـ ، كرر النشاط باختيار قياسات أخرى لطول ب جـ وقياس زاويتى ب، جـ و أكمل الجدول:

رقم المثلث	ب جـ	ق (∠ ب)	ق (∠ جـ)	أ ب	أ جـ
١	٧سم	٥٠°	٥٠°	....	....
٢	....	....	....	....	....
٣	....	....	....	....	....
٤	....	....	....	....	....

١ هل طول أ ب = طول أ جـ ؟

٢ هل أ ب ≡ أ جـ ؟

٣ كيف يمكنك تفسيرُ هذه النتائج هندسيًّا؟



نظرية (٢)

إذا تطابقت زاويتان فى مثلثٍ فإن الضلعينِ المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ، ويكون المثلث متساوى الساقين.

المعطيات : △ اب جـ فيه ∠ ب ≡ ∠ جـ

المطلوب : إثبات أن $\overline{\text{اب}}$ ≡ $\overline{\text{اجـ}}$

العمل : ننصف ∠ ب ا جـ بالمنصف $\overrightarrow{\text{اى}}$ يقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى

البرهان : ∵ ∠ ب ≡ ∠ جـ

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)

∵ $\overrightarrow{\text{اى}}$ ينصف ∠ ب ا جـ

∴ ق (∠ ب ا ى) = ق (∠ جـ ا ى)

∵ مجموعُ قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (∠ اى ب) = ق (∠ اى جـ)

∴ المثلثان اى ب ، اى جـ فيهما

- $\overline{\text{اى}}$ ضلع مشترك
- ق (∠ ب ا ى) = ق (∠ جـ ا ى)
- ق (∠ اى ب) = ق (∠ اى جـ)

∴ △ اى ب ≡ △ اى جـ

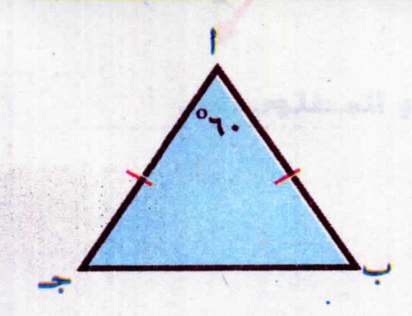
وينتج من التطابق أن $\overline{\text{اب}}$ ≡ $\overline{\text{اجـ}}$

ويكون △ اب جـ متساوى الساقين.

نتيجة

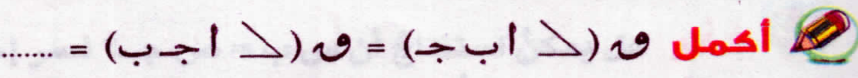


إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع.



فى الشَّكل المقابل اب جـ مثلث متساوى الساقين فيه:

اب = اجـ ، ق (∠ ب ا جـ) = ٦٠°



أكمل ق (∠ اب جـ) = ق (∠ ا جـ ب) = ...

أى أن: ∠ ...... ≡ ∠ .... ≡ ....

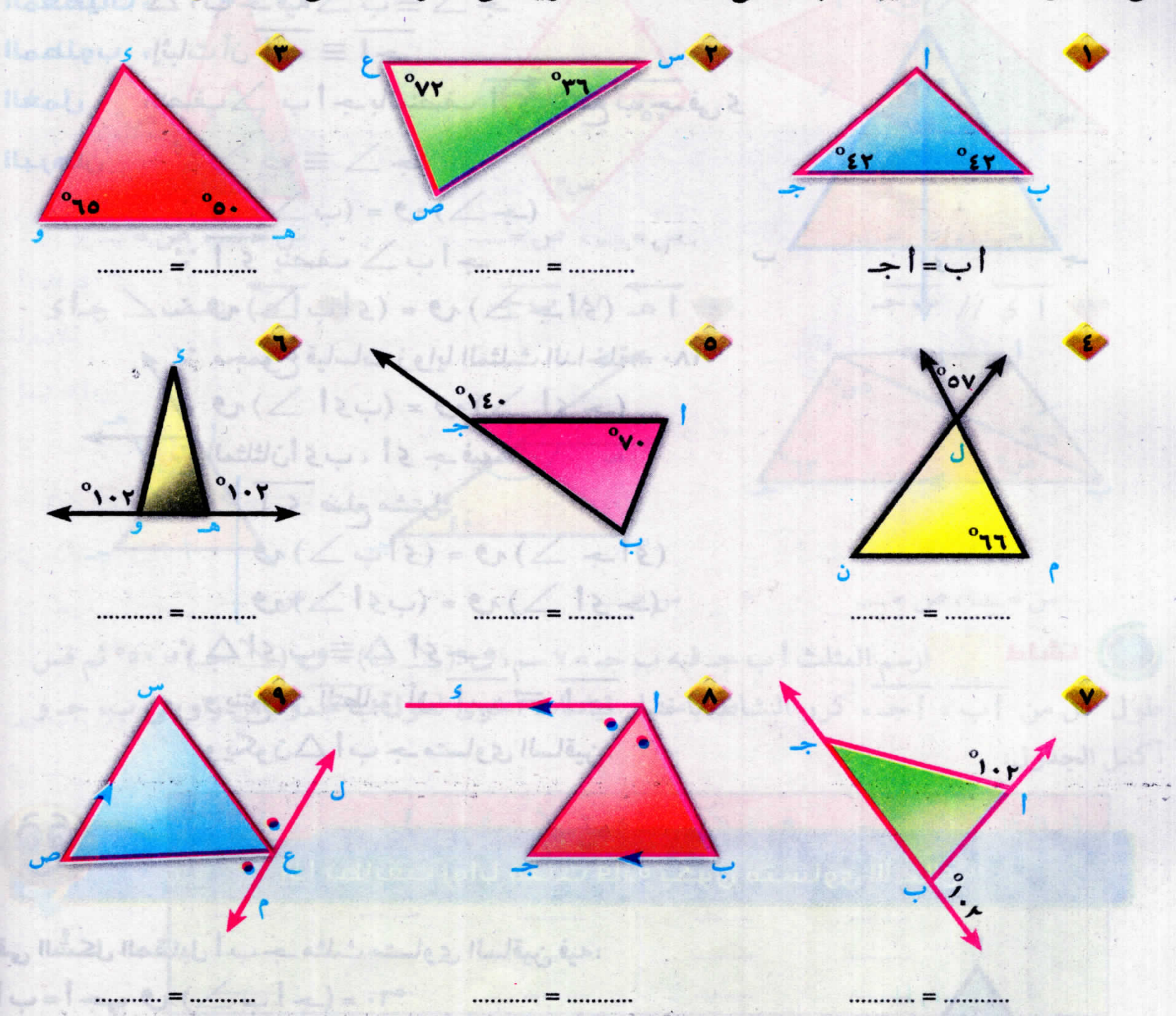
∴ △ اب جـ هو مثلث ....



لاحظ أن: المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون متساوى الأضلاع.

تدرب

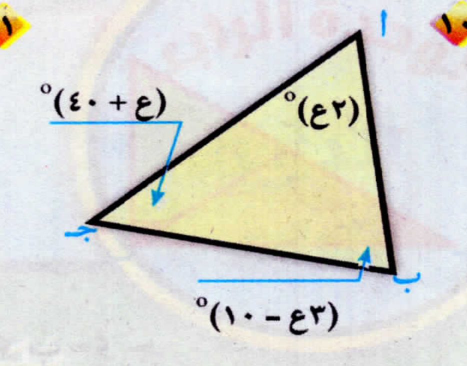
١ فى كلٍّ من الأشكال الآتيةِ اكتب أضلاع المثلث المتساوية فى الطول كما فى المثال :

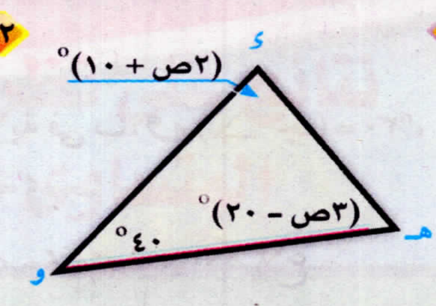


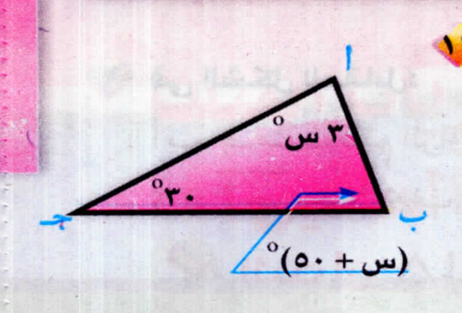
.... = ... = ... = ...

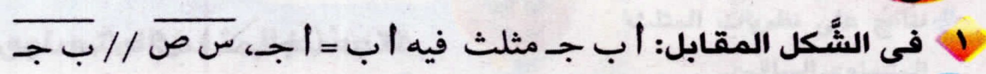
.... = ... = ... = ...

.... = ... = ... = ...








.... = ... = ... = ...

أمثلة

١ في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

اثبت أن △ أ س ص متساوى الساقين.

المعطيات: أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: إثبات أن أ س = أ ص

البرهان: فى △ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ جـ ب) (١)

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ب جـ) **بالتناظر** (٢)

بالمثل ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ أ ص س) = ق (∠ أ جـ ب) **بالتناظر** (٣)

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن:

ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ص س)

فى △ أ س ص

∵ ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ص س)

∴ أ س = أ ص

أى أن المثلث أ س ص متساوى الساقين **وهو المطلوب**

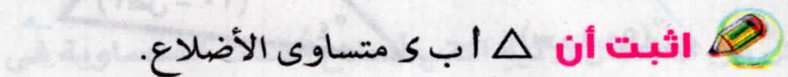
أ، س، ص، ب، جـ

فكّر هل يمكنُ استنتاجُ أن س ب = ص جـ؟ فسر إجابتك.

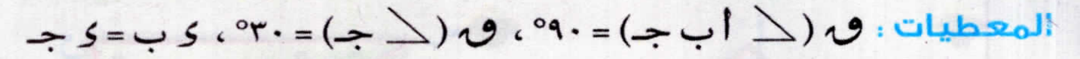
٢ فى الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، ق (∠ جـ) = ٣٠°،

ى ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث ى ب = ى جـ



اثبت أن △ أ ب ى متساوى الأضلاع.



المعطيات : ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°، ق (∠ جـ) = ٣٠°، ى ب = ى جـ

المطلوب : إثبات أن أ ب = ب ى = أ ى

البرهان : فى △ ى ب جـ ∵ ى ب = ى جـ

∴ ق (∠ ى ب جـ) = ق (∠ جـ) = ٣٠°

فى △ أ ب جـ ∵ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°، ق (∠ ى ب جـ) = ٣٠°

∴ ق (∠ ب أ ى) = ٩٠° - ٣٠° = ٦٠° (١)

∵ ∠ أ ى ب خارجة عن △ ب ى جـ

∴ ق (∠ أ ى ب) = ق (∠ ى ب جـ) + ق (∠ ى جـ ب)

ق (∠ أ ى ب) = ٣٠° + ٣٠° = ٦٠° (٢)

فى △ أ ب ى ∵ مجموع قياسات زوايا △ الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ ب ى) = ١٨٠° - (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠° (٣)

من (١)، (٢)، (٣) ∴ ق (∠ أ ب ى) = ق (∠ أ ى ب) = ق (∠ أ)

أى أن ∠ أ ب ى ≡ ∠ أ ى ب ≡ ∠ أ

∴ المثلث أ ب ى متساوى الأضلاع **أى أن** أ ب = ب ى = أ ى.



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

الوحدة الرابعة

الدرس الرابع

نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

فكّر وناقِش

سوف تتعلم

- نتائجُ على نظرياتِ المثلث المتساوى الساقين.

المصطلحات الأساسية

- مثلث متساوى الساقين.
- منصف زاوية الرأس.
- منصف قاعدة المثلث.
- محور تماثل القطعة المستقيمة.

نتيجة (١)

متوسِّطُ المثلثِ المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاويةَ الرأس ويكون عموديًا على القاعدة

فى الشَّكل المقابل

△ ا ب جـ فيه ا ب = ا جـ

، $\overline{\text{ا ى}}$ متوسط فيه

فإن: $\overleftarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ ب ا جـ

، $\overline{\text{ا ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

لاحظ أن: △ ا ى ب ≡ △ ا ى جـ لماذا؟





منصفُ زاويةِ الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصفُ القاعدة ويكونُ عموديًا عليها.

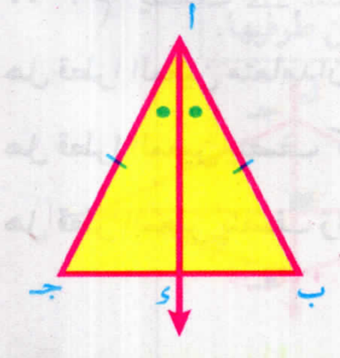
فى الشكل المقابل:

△ ا ب جـ فيه ا ب = ا جـ ،

$\overleftarrow{\text{ا ى}}$ ينصف ∠ ب ا جـ

فإن ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ا ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

لاحظ أن △ ا ى ب ≡ △ ا ى جـ لماذا؟

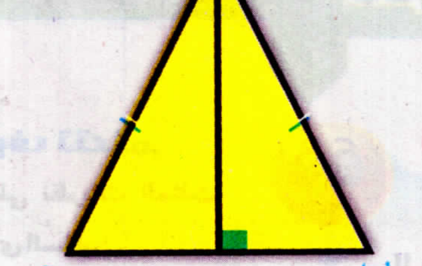




نتيجة (٣)

المستقيمُ المرسومُ من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديًا على القاعدةِ ينصف كلاً من القاعدة وزاويةالرأس.

في الشَّكل المقابل:



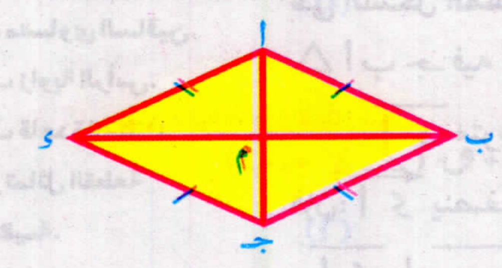
△ ا ب جـ فيه ا ب = ا جـ ، ا ء ⊥ ب جـ

فإن ء تنصف ب جـ ، ق (∠ ب ا ء) = ق (∠ جـ ا ء)

لاحظ أن △ ا ء ب ≡ △ ا ء جـ لماذا؟

فكّر

في الشَّكل المقابل:



ا ب جـ ء شكل رباعي جميع أضلاعه متساوية في الطول.

هذا الشكل يسمى معين ، قطراه ا جـ ، ب ء

يتقاطعان في نقطة م.

لاحظ أن: △ ا ب ء ≡ △ جـ ب ء لماذا؟

∴ ق (∠ ا ب ء) = ق (∠ جـ ب ء)

في △ ا ب جـ ، ا ب = ب جـ ، ب م ينصف ∠ ا ب جـ

∴ ب م ⊥ .... ، م منتصف ا جـ

في △ ب ا ء ، ا ب = ا ء ، ا م ⊥ ب ء

∴ ا م ينصف ∠ .... ، م منتصف ب ء

هل قطرا المعين متعامدان؟

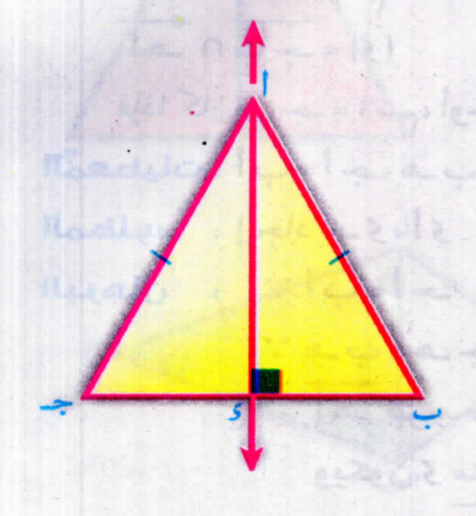
هل قطرا المعين ينصف كل منهما الآخر؟

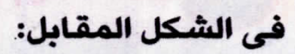
هل قطر المعين ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما؟ سجِّل إجابتك .

محاورُ التَّماثل

أولاً: محورُ التماثلِ للمثلثِ المتساوى الساقين

محور تماثل المثلث المتساوى الساقين هو المستقيمُ المرسوم من رأسه عموديًا على قاعدته.





فى الشكل المقابل:

△ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، أ ء ⊥ ب جـ

فإن أ ء هو محور تماثل للمثلث أ ب جـ المتساوى الساقين.

ناقش:

هل يوجدُ للمثلثِ المتساوى الساقين أكثرُ من محور تماثل؟

كم عددُ محاورِ التماثل فى المثلث المتساوى الأضلاع؟

هل توجد للمثلثِ المختلفِ الأضلاع محاورُ تماثل؟

ثانيًا: محور تماثل القطعة المستقيمة:

يسمى المستقيم العمودى على قطعة مستقيمة من منتصفها محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة وللاختصار يسمى محور القطعة المستقيمة.

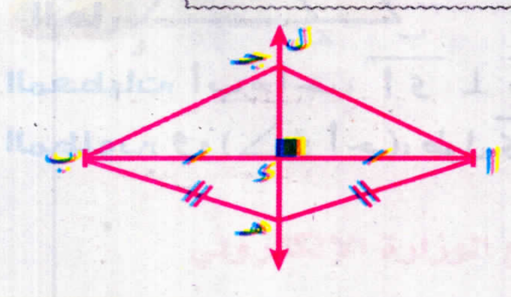
فى الشَّكل المقابل:

إذا كانت ء منتصف أ ب ، المستقيم ل ⊥ أ ب حيث ء ∈ ل

فإن المستقيم ل هو محور أ ب

خاصيَّة هامة

أيُّ نقطةٍ على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها.



لاحظ أن:

1. إذا كانت جـ ∈ ل فإن أ جـ = ب جـ
2. إذا كان هـ أ = هـ ب فإن هـ ∈ ل لماذا؟



مثال

١ في الشَّكل المقابل

أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، هـ ب = هـ جـ

أ هـ ∩ ب جـ = {ى}

فإذا كان ب جـ = ٦سم، أوجد طول كل من جـ ى ، أ ى

المعطيات : أ ب = أ جـ، هـ ب = هـ جـ

المطلوب : إيجاد جـ ى ، أ ى

البرهان : ∵ أ ب = أ جـ ∴ أ تقع على محور ب جـ

∵ هـ ب = هـ جـ ∴ هـ تقع على محور ب جـ

∴ أ هـ هو محور ب جـ

ويكون ى منتصف ب جـ ، أ ى ⊥ ب جـ

∵ ى منتصف ب جـ ، ب جـ = ٦سم ∴ جـ ى = ٣سم

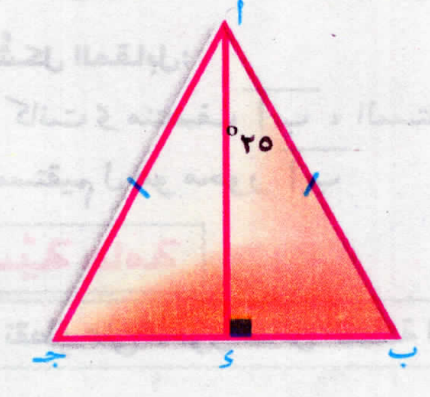
∵ أ ى ⊥ ب جـ

∴ في △ أ ى جـ القائم الزاوية في ى

(أ ى)^2 = (أ جـ)^2 - (جـ ى)^2

(أ ى)^2 = ١٠٠ - ٩

∴ أ ى = $\sqrt{91}$ سم



٢ في الشَّكل المقابل

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ،

أ ى ⊥ ب جـ، ق (∠ ب أ ى) = ٢٥°،

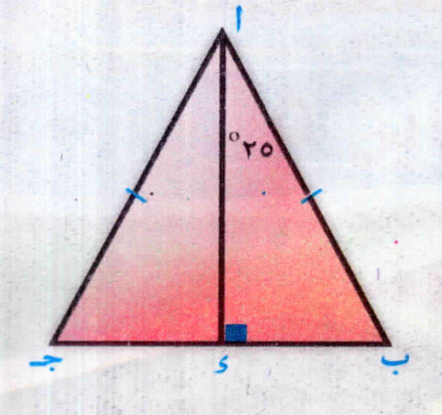
ب جـ = ٤سم أوجد :

أ ق (∠ ى أ جـ) **ب** طول ى جـ

الحل

المعطيات: أ ب = أ جـ ، أ ى ⊥ ب جـ ، ق (∠ ب أ ى) = ٢٥°، ب جـ = ٤سم

المطلوب: ق (∠ ى أ جـ)، طول ى جـ.



البرهان : فى $\triangle$ ا ب جـ

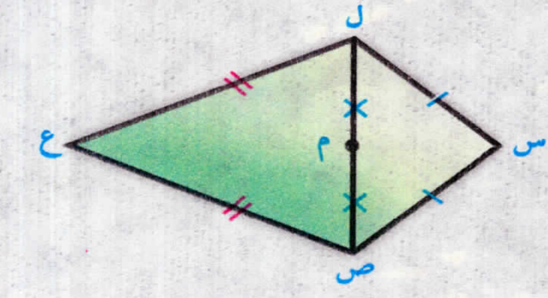
$\because$ ا ب = ا جـ ، $\overline{\text{ا ى}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{ا ى}}$ ينصف القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ وينصف $\angle$ ب ا جـ

$\therefore$ ق ($\angle$ ى ا جـ) = ق ($\angle$ ى ا ب) = ٢٥°،

ى جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ = $\frac{4}{2}$ = ٢سم.

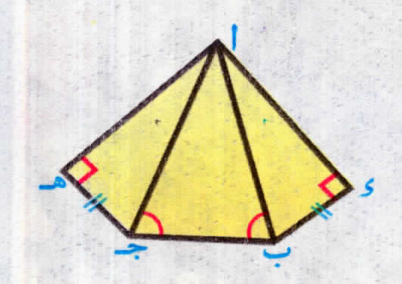
تدرب



١ فى الشَّكل المقابل

س ص = س ل ، ع ص = ع ل ، ل م = ص م

أثبت أن س ، م ، ع على استقامة واحدة.



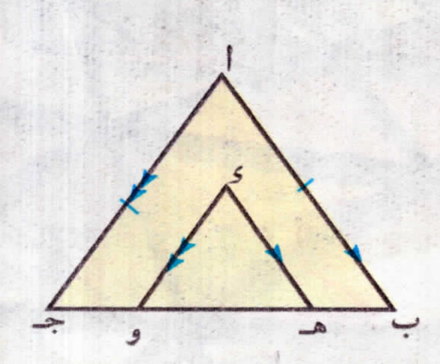
٢ فى الشكل المقابل:

ب ى = جـ هـ

ق ($\angle$ ا ب جـ) = ق ($\angle$ ا جـ ب)

ق ($\angle$ ى) = ق ($\angle$ هـ) = ٩٠°

برهن أن: ق ($\angle$ ى ا ب) = ق ($\angle$ جـ ا هـ)



٣ فى الشَّكل المقابل:

ا ب = ا جـ، $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ا ب}}$

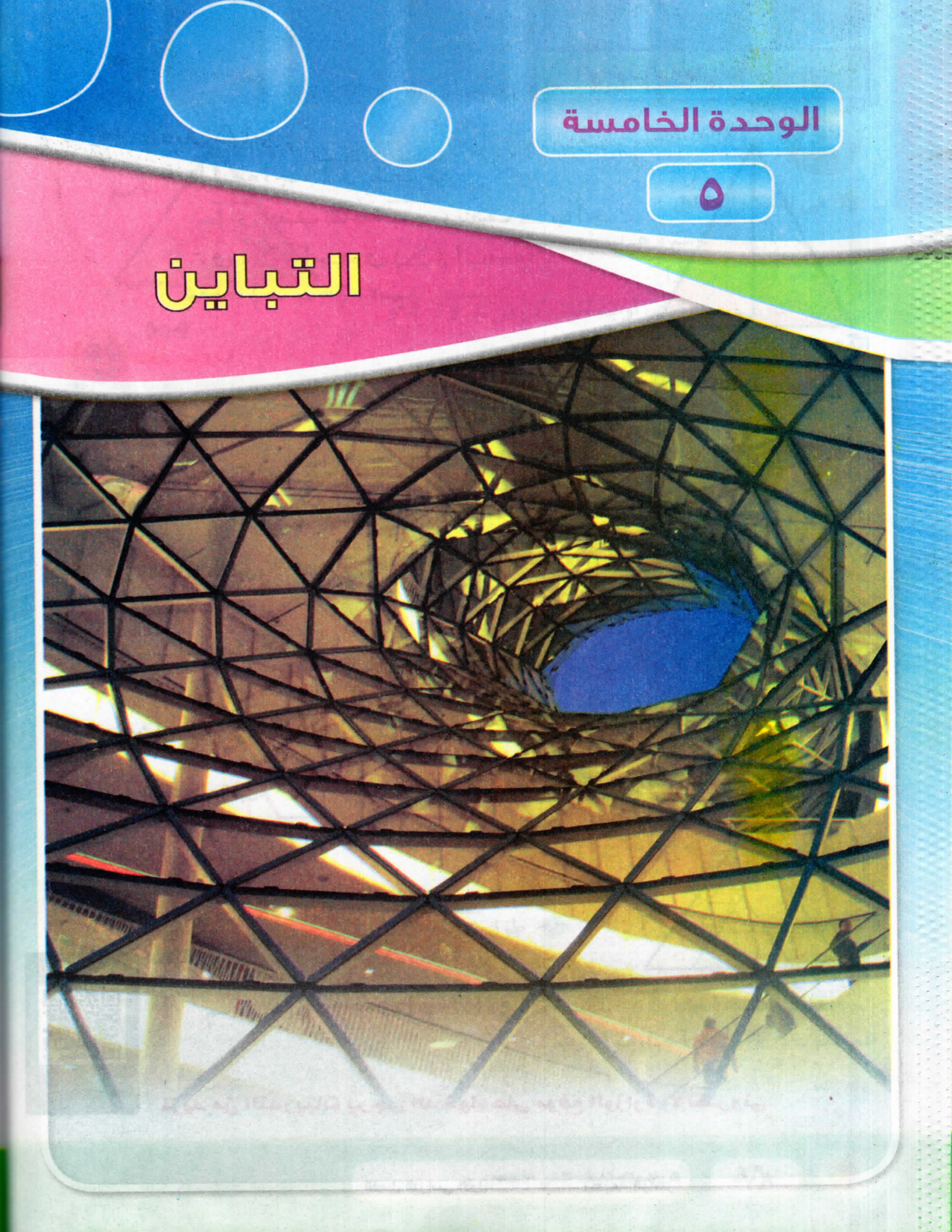
$\overline{\text{ى و}}$ // $\overline{\text{ا جـ}}$

اثبت: أولًا: ى هـ = ى و

ثانيًا: ق ($\angle$ ب ا جـ) = ق ($\angle$ هـ ى و)



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني


الوحدة الخامسة
٥
التباين

الوحدة الخامسة

الدرس الأول

التباين

فكّر وناقِش

سوف تتعلم

- مفهوم التباين.
- مسلماتُ التباين.

المصطلحات الأساسية

- تباين
- مسلمة
- أكبر من >
- أصغر من <
- يساوى =

مفهومُ التَّباين

١ هل جميعُ تلاميذ فصلك لهم نفس الطول؟

٢ هل هناك اختلافٌ بين قياسِ الزاوية الحادَّة والزاوية القائمة والزاوية المنفرجة؟

ماذا يعنى هذا الاختلاف؟

لاحظ أن:

التباين يعنى وجودَ اختلافٍ فى أطوال التلاميذ، وفى قياسات الزوايا، ويعبِّر عنه بعَلاقة التباين ، والتى تستخدم للمقارنة بين عددين مختلفين.

أمثلة

١ **إذا كانت:** $\angle$ ا ب جـ حادة **فإن:** ق ($\angle$ ا ب جـ) < ٩٠°

٢ **فى الشكل المقابل:** ا ب جـ مثلث فيه

ا ب = ٤سم، ب جـ = ٣,٥ سم،

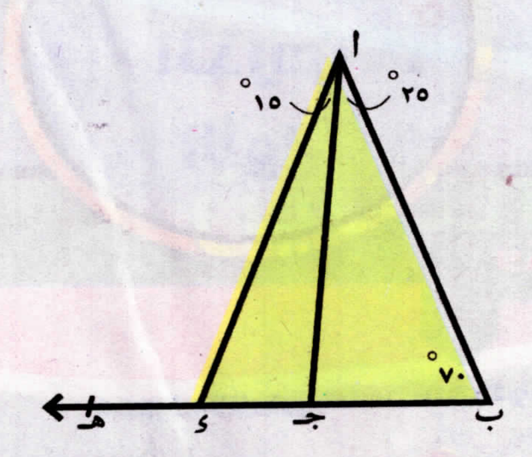
ا جـ = ٢,٤ سم

فإن: ا ب > ب جـ ، ب جـ > ا جـ

أى أن ا ب > ب جـ > ا جـ

ا ٤سم ٢,٤سم جـ ٣,٥سم ب

تدرب



فى الشكل المقابل أوجد: ق (∠ ا جـ ب) ، ق (∠ ا جـ ء)،

ق (∠ ا ء هـ) ثم أكمل باستخدام > أو <:

ق (∠ ا ء هـ) .... ق (∠ جـ ا ء)

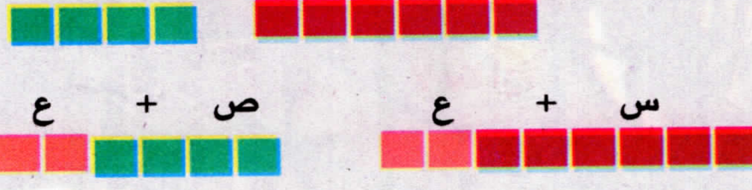
ق (∠ ا ء جـ) .... ق (∠ ا جـ ب)

ق (∠ ا جـ ء) .... ق (∠ ا ب جـ)

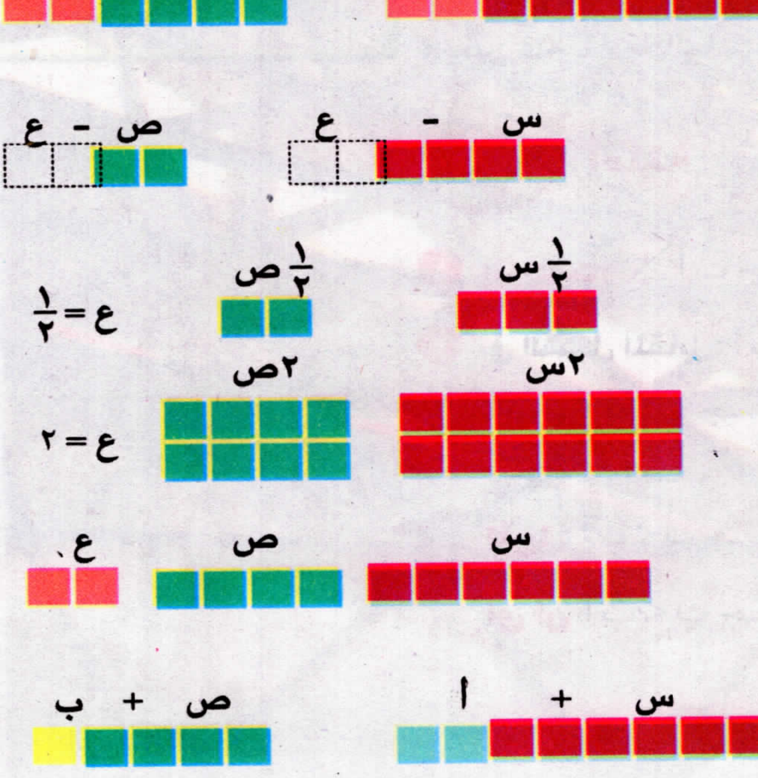
ق (∠ ا جـ ء) .... ق (∠ ا ء هـ)

لاحظ أن: جميعُ العلاقاتِ السابقة تسمى **متباينات**

مسلماتُ التباين



لأىّ ثلاثة أعداد س ، ص، ع:



١ **إذا كان:** س > ص

فإن: س + ع > ص + ع

٢ **إذا كان:** س > ص

فإن: س - ع > ص - ع

٣ **إذا كان:** س > ص ، ع **عددًا موجبًا**

فإن: س ع > ص ع

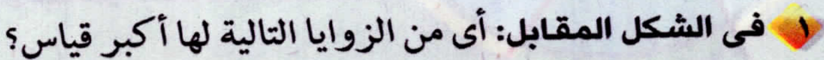
٤ **إذا كان:** س > ص ، ص > ع

فإن: س > ع

٥ **إذا كان:** س > ص ، ا > ب

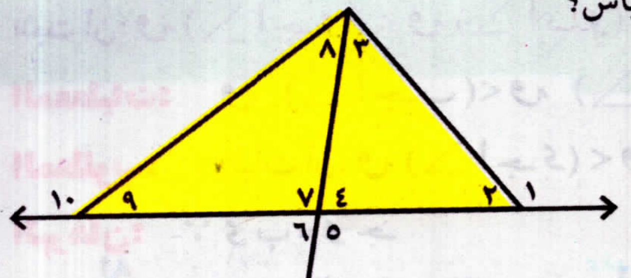
فإن: س + ا > ص + ب

تذكر أن: قياس أى زاوية خارجة للمثلثِ أكبر من قياس أىِّ زاويةٍ داخلة ماعدا المجاورة لها.



تدرب

١ فى الشكل المقابل: أى من الزوايا التالية لها أكبر قياس؟



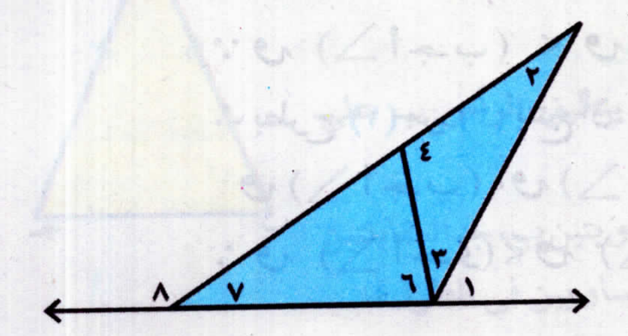
أ ∠ ١ ، ∠ ٣ ، ∠ ٤

ب ∠ ٤ ، ∠ ٨ ، ∠ ٩

جـ ∠ ٢ ، ∠ ٣ ، ∠ ٧

د ∠ ٧ ، ∠ ٨ ، ∠ ١٠

٢ فى الشكل المقابل عين:

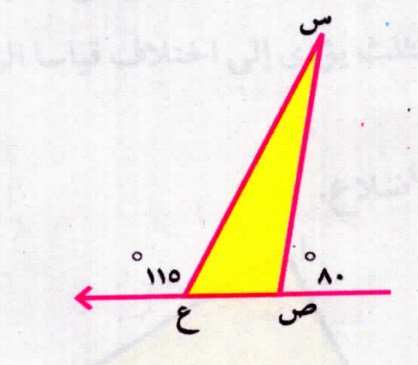


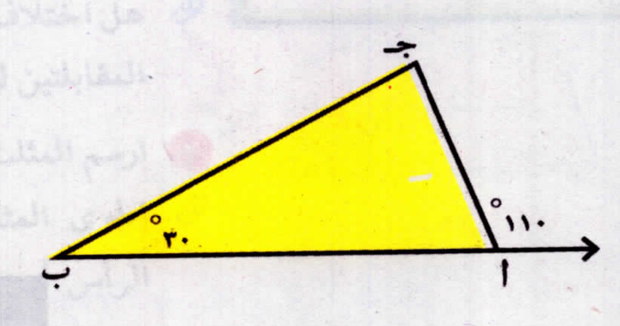
أ جميع الزوايا التى قياسها أقل من ق (∠ ١)

ب جميع الزوايا التى قياسها أكبر من ق (∠ ٦)

جـ جميع الزوايا التى قياسها أقل من ق (∠ ٤)

٣ رتِّب قياساتِ زوايا المثلث أ ب جـ تصاعديًا، قياسات زوايا المثلث س ص ع تنازليًا.

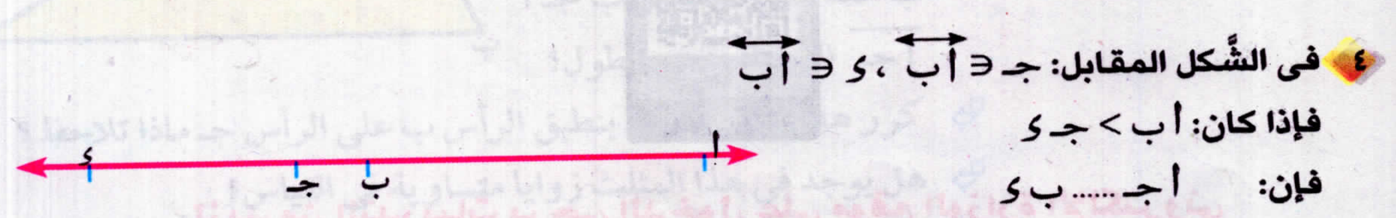




ق (∠ ....) < ق (∠ ....) < ق (∠ ....)

ق (∠ ....) > ق (∠ ....) > ق (∠ ....)

٤ فى الشَّكل المقابل: جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، ى ∈ $\overleftrightarrow{أب}$



فإذا كان: أ ب > جـ ى

فإن: أ جـ ...... ب ى



مثال

في الشكل المقابل:

ق (∠ ا جـ ب) > ق (∠ ا ب جـ)، ء ب = ء جـ

اثبت أن: ق (∠ ا جـ ء) > ق (∠ ا ب ء)

المعطيات: ق (∠ ا جـ ب) > ق (∠ ا ب جـ)، ء ب = ء جـ

المطلوب: إثبات أن: ق (∠ ا جـ ء) > ق (∠ ا ب ء)

البرهان: ∵ ء ب = ء جـ

∴ ق (∠ ء جـ ب) = ق (∠ ء ب جـ) (١)

∵ ق (∠ ا جـ ب) > ق (∠ ا ب جـ) (٢)

∴ بطرح (١) من (٢) ينتج أن:

ق (∠ ا جـ ب) - ق (∠ ء جـ ب) > ق (∠ ا ب جـ) - ق (∠ ء ب جـ)

∴ ق (∠ ا جـ ء) > ق (∠ ا ب ء) وهو المطلوب



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

الوحدة الخامسة
الدرس الثانى
المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث

فكّر وناقش

سوف تتعلم

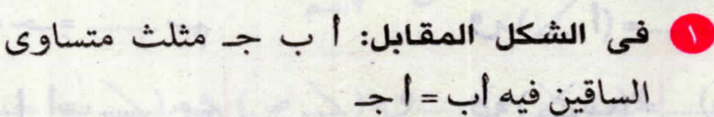
- المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث.

المصطلحات الأساسية

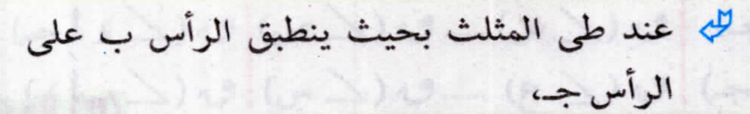
- زاوية .
- قياس زاوية.
- أكبر زاوية فى مثلث .
- أصغر زاوية فى مثلث .
- أكبر ضلع فى مثلث .
- أصغر ضلع فى مثلث .

نشاط

١ **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أب = أ جـ

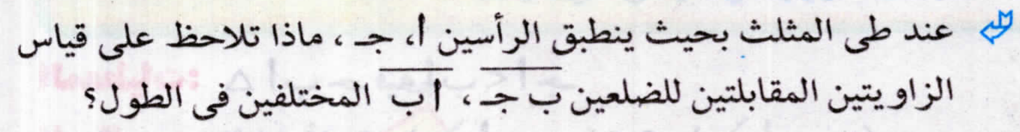


- عند طى المثلث بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس جـ،



ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين ب، جـ المقابلتين للضلعين أ جـ ، أ ب المتساويين فى الطول؟

- عند طى المثلث بحيث ينطبق الرأسين أ، جـ ، ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين المقابلتين للضلعين ب جـ ، أ ب المختلفين فى الطول؟

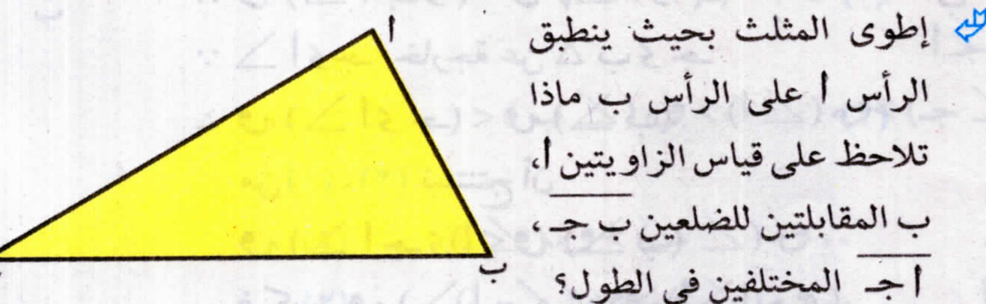


- هل اختلاف طولا ضلعين فى المثلث يؤدى إلى اختلاف قياسا الزاويتين المقابلتين لهما؟

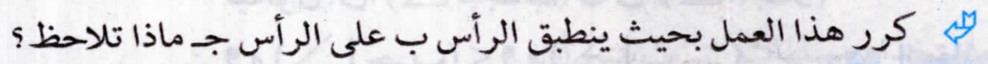
٢ ارسم المثلث أ ب جـ مختلف الأضلاع.



- إطوى المثلث بحيث ينطبق الرأس أ على الرأس ب ماذا تلاحظ على قياس الزاويتين أ، ب المقابلتين للضلعين ب جـ ، أ جـ المختلفين فى الطول؟



- كرر هذا العمل بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس جـ ماذا تلاحظ ؟



- هل يوجد فى هذا المثلث زوايا متساوية فى القياس؟



لاحظ أن: إذا اختلفت أطوال أضلاع المثلث تختلف قياسات زواياه المقابلة لهذه الأضلاع.

نشاط

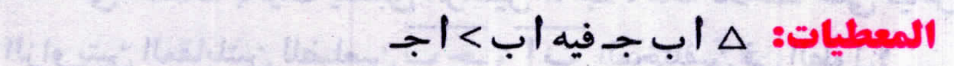
ارسم المثلث ا ب جـ مختلف الأضلاع ثم قس أطوال أضلاعه الثلاثة ، وقياسات زواياه المناظرة ثم أكمل الجدول التالى:

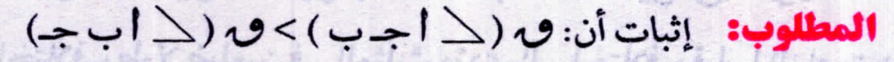
أطوال الأضلاع	قياسات الزوايا المقابلة
اب = ... سم	ق (∠ جـ) = ... °
ب جـ = ... سم	ق (∠ ا) = ... °
جـا = ... سم	ق (∠ ب) = ... °

ماذا تلاحظ؟

نظرية (٣)







إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر.

المعطيات: △ ا ب جـ فيه ا ب > ا جـ

المطلوب: إثبات أن: ق (∠ ا جـ ب) > ق (∠ ا ب جـ)

العمل: نأخذ ى ∈ $\overline{اب}$ بحيث ا ى = ا جـ

البرهان: △ ا جـ ى فيه ا ى = ا جـ

∴ ق (∠ ا جـ ى) = ق (∠ ا ى جـ) (١)

∵ ∠ ا ى جـ خارجة عن △ ب ى جـ

∴ ق (∠ ا ى جـ) > ق (∠ ب) (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن

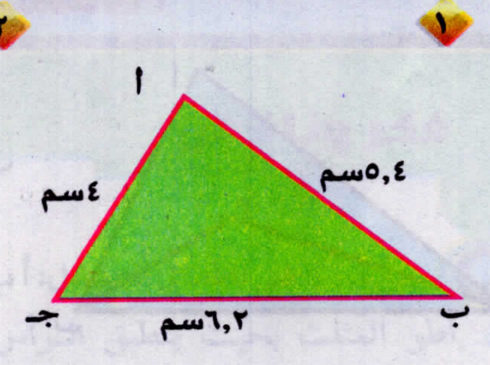
ق (∠ ا جـ ى) > ق (∠ ب)

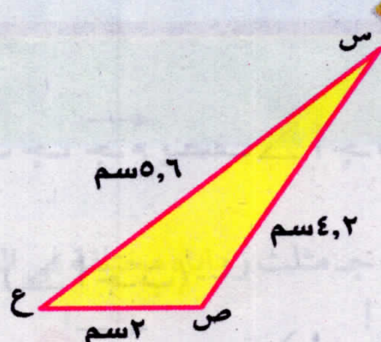
فيكون ق (∠ ا جـ ب) > ق (∠ ا جـ ى)

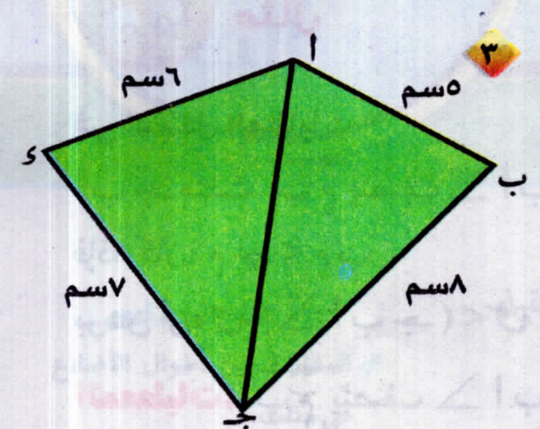
∴ ق (∠ ا جـ ب) > ق (∠ ا ب جـ) وهو المطلوب.

تدرب

فى كل من الأشكال التالية اكمل باستخدام (>، <)





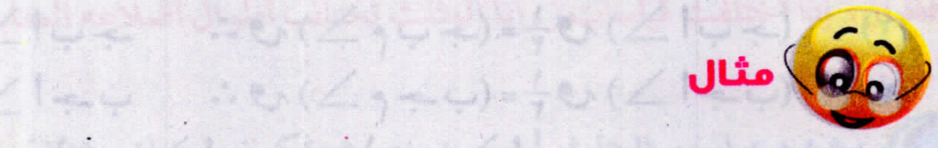


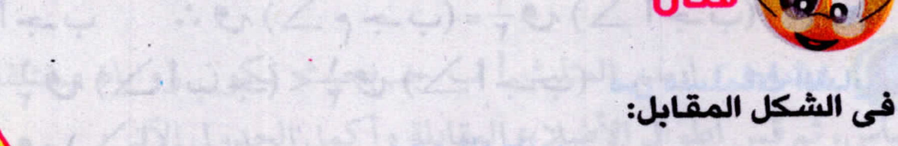
١	٢	٣
ق (∠ ا) ...... ق (∠ ب)	ق (∠ ع) ...... ق (∠ ص)	ق (∠ ب ا جـ) .... ق (∠ ب جـ ا)
ق (∠ ا) ...... ق (∠ جـ)	ق (∠ س) ...... ق (∠ ص)	ق (∠ ء ا جـ) .... ق (∠ ء جـ ا)
ق (∠ ب) ...... ق (∠ جـ)	ق (∠ ع) ...... ق (∠ س)	ق (∠ ب ا ء) .... ق (∠ ب جـ ء)

لاحظ أن: قياس أكبر زاوية فى المثلث $> 60^\circ$

قياس أصغر زاوية فى المثلث $< 60^\circ$ **لماذا؟**

مثال



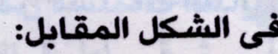


فى الشكل المقابل:

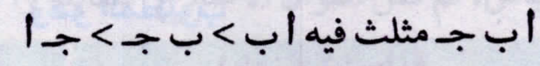
ا ب جـ مثلث فيه ا ب > ب جـ > جـ ا

برهن أن: ق (∠ جـ) > ق (∠ ا) > ق (∠ ب)

المعطيات: ا ب > ب جـ > جـ ا



المطلوب: إثبات أن ق (∠ جـ) > ق (∠ ا) > ق (∠ ب)



البرهان: فى △ ا ب جـ

∵ ا ب > ب جـ ∴ ق (∠ جـ) > ق (∠ ا) (١)

∵ ب جـ > جـ ا ∴ ق (∠ ا) > ق (∠ ب) (٢)

من (١) ، (٢) وباستخدام مسلمات التباين ينتج أن:

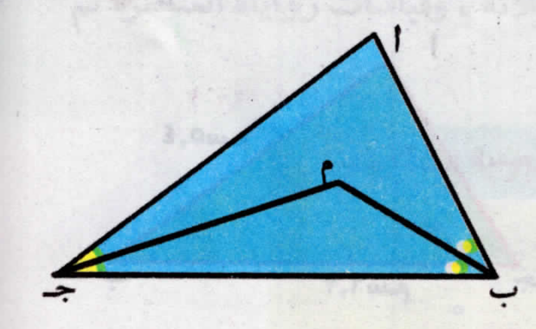
ق (∠ جـ) > ق (∠ ا) > ق (∠ ب)



تذكر أن: أكبر أضلاع المثلث طولاً يقابل أكبر زوايا المثلث فى القياس
وأصغر أضلاع المثلث طولاً يقابل أصغر زوايا المثلث فى القياس.



مثال



فى الشَّكل المقابل:

اب جـ مثلث، $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ اب جـ، $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ اجـ ب

فإذا كان: م جـ > م ب

برهن أن: ق (∠ اب جـ) > ق (∠ اجـ ب)

المعطيات: $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ اب جـ، $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ اجـ ب

، م جـ > م ب.

المطلوب: إثبات أن ق (∠ اب جـ) > ق (∠ اجـ ب)

البرهان: فى △ م ب جـ

∵ م جـ > م ب ∴ ق (∠ م ب جـ) > ق (∠ م جـ ب) (١)

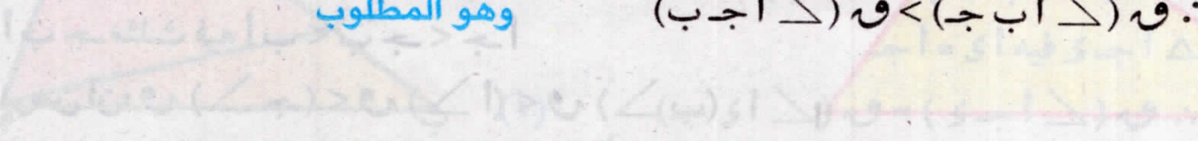
فى △ اب جـ

∵ $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ اب جـ ∴ ق (∠ م ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ اب جـ) (٢)

∵ $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ اجـ ب ∴ ق (∠ م جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ اجـ ب) (٣)

∴ من (١)، (٢)، (٣): $\frac{1}{2}$ ق (∠ اب جـ) > $\frac{1}{2}$ ق (∠ اجـ ب) من مسلمات التباين

∴ ق (∠ اب جـ) > ق (∠ اجـ ب) وهو المطلوب





لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث

فكر وناقش

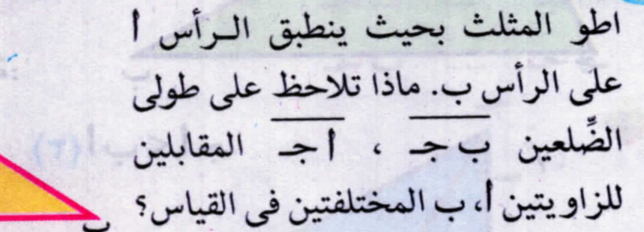
سوف تتعلم

- المقارنة بين أطوال الأضلاع فى مثلث.

المصطلحات الأساسية

- أطول ضلع فى مثلث.
- أصغر ضلع فى مثلث.
- أكبر زاوية فى مثلث.
- أصغر زاوية فى مثلث.
- قطعة مستقيمة عمودية.

نشاط ١ **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث زواياه مختلفة فى القياس.



- اطو المثلث بحيث ينطبق الرأس أ على الرأس ب. ماذا تلاحظ على طولى الضِّلعين $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ المقابلين للزاويتين أ، ب المختلفتين فى القياس؟
- كرر هذا العمل بحيث ينطبق الرأس ب على الرأس جـ، ماذا تلاحظ؟
- عندما ينطبق الرأس جـ على الرأس أ، ماذا تلاحظ؟
- هل يوجد فى هذا المثلث أضلاع متساوية فى الطول؟

لاحظ أن: إذا اختلفت قياسات زوايا المثلث تختلف أطوال أضلاعه المقابلة لهذه الزوايا.

نشاط ٢ ارسم المثلث أ ب جـ بحيث تكون زواياه مختلفة فى القياس، ثم قس أطوال الأضلاع المقابلة وأكمل الجدول الآتى:

قياسات الزوايا	أطوال الأضلاع المقابلة له
ق(∠ أ) = ...°	ب جـ = ... سم
ق(∠ ب) = ...°	جـ أ = ... سم
ق(∠ جـ) = ...°	أ ب = ... سم

ماذا تلاحظ؟

- هل أكبر زاوية فى القياس يقابلها أكبرُ ضلع فى الطول؟ وأصغر زاوية فى القياس يقابلها أصغر ضلع فى الطول؟
- هل يمكن ترتيبُ أطوالِ أضلاع المثلث تصاعديًّا أو تنازليًّا تبعًا لقياسات الزوايا المقابلة لها؟

نظرية (٤)

إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياسِ يقابلها ضلعٌ أكبر فى الطول من الذى يقابل الأخرى .

المعطيات: △ اب جـ فيه ق (∠ جـ) > ق (∠ ب)

المطلوب: إثبات أن: اب > اجـ

البرهان: ∵ $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{اجـ}}$ قطع مستقيمة

∴ يجب أن تتحقق إحدى الحالات التالية:

(١) اب < اجـ (٢) اب = اجـ (٣) اب > اجـ

إذا لم تكن اب > اجـ

فإما اب = اجـ **أو** اب < اجـ

إذا كان اب = اجـ **فإن** ق (∠ جـ) = ق (∠ ب)

وهذا يخالف المعطيات **حيث إن** ق (∠ جـ) > ق (∠ ب)

و إذا كان اب < اجـ **فإن** ق (∠ جـ) < ق (∠ ب) حسب النظرية السابقة

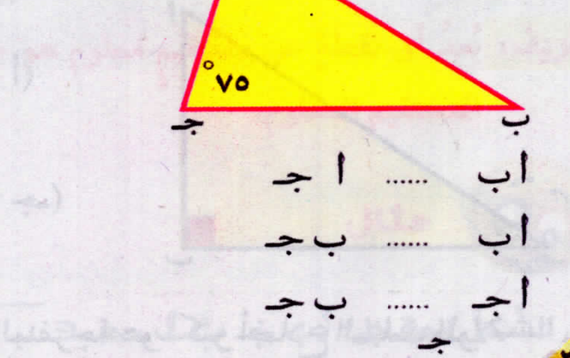
وهذا يخالف المعطيات **حيث أن** ق (∠ جـ) > ق (∠ ب)

∴ يجب أن يكون اب > اجـ **وهو المطلوب**

تدرب

فى الأشكال التالية أكمل باستخدام > أو < أو =

١

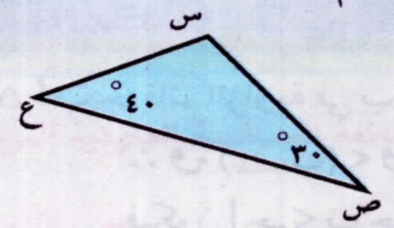


اب ...... اجـ

اب ...... ب جـ

اجـ ...... ب جـ

٢

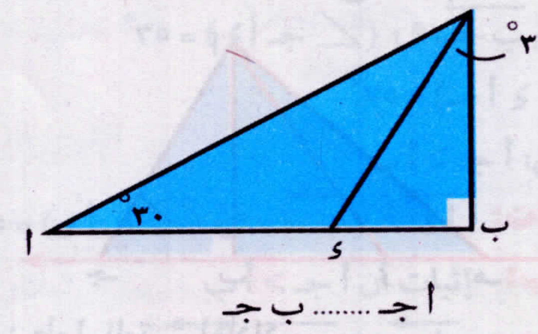


س ص ...... س ع

ص ع ...... س ص

ص ع ...... س ع

٣



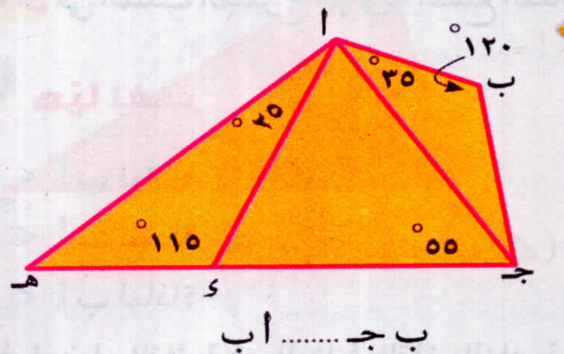
اجـ ...... ب جـ

ب جـ ...... ء ب

اجـ ...... ب ء

جـ ء ...... اجـ

٤



ب جـ ...... اب

جـ ء ...... جـ ا

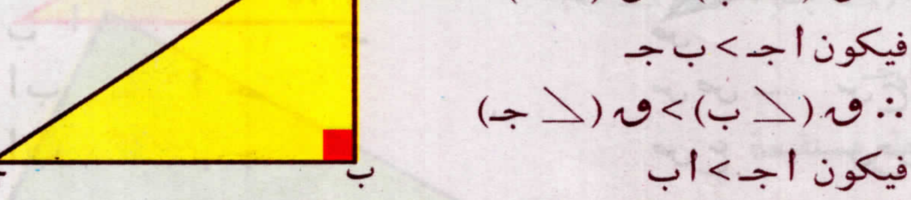
ا ء ...... اهـ

جـ ء ...... ا ء

نتائج



نتيجة (١)



فى المثلث القائم الزاوية يكون الوترُ هو أطول أضلاع المثلث.

فى الشكل المقابل: △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب.

∵ ∠ أ حادة ∴ ق (∠ ب) > ق (∠ أ)

فيكون أ جـ > ب جـ

∵ ∠ جـ حادة ∴ ق (∠ ب) > ق (∠ جـ)

فيكون أ جـ > أ ب

لاحظ أن فى المثلثِ المنفرجِ الزاوية الضّلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أكبر أضلاع المثلث طولًا.

هيّا نفكر

أ جـ > أ ب لماذا؟

أ ء > أ ب لماذا؟

أ هـ > أ ب لماذا؟

هل طول ضلع القائمة فى المثلث القائم الزاوية أصغر من طول الوتر . لماذا؟



نتيجة (٢)

طول القطعة المستقيمة العموديَّة المرسومة من نقطةٍ خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم.

تعريف: بُعدُ أى نقطةٍ عن مستقيمٍ معلوم هو طولُ القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم.

مثال

فى الشَّكل المقابل: أ ب جـ مثلث ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

$\overleftarrow{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، ق (∠ جـ أ ء) = ٣٥°

ق (∠ ء أ هـ) = ٧٥°

برهن أن: أ جـ > أ ب

المعطيات: $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، ق (∠ هـ أ ء) = ٧٥°، ق (∠ ء أ جـ) = ٣٥°

المطلوب: إثبات أن أ جـ > أ ب

البرهان: ∵ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ هـ أ ء) = ٧٥° بالتناظر (١)

∵ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ق (∠ ء أ جـ) = ٣٥° بالتبادل (٢)

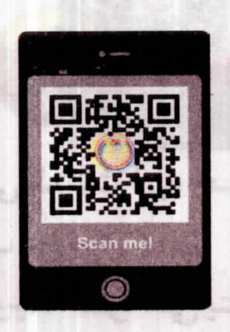
من (١) ، (٢) يكون:

فى المثلث أ ب جـ

ق (∠ أ ب جـ) = ٧٥°، ق (∠ أ جـ ب) = ٣٥°

أى أن ق (∠ أ ب جـ) > ق (∠ أ جـ ب)

∴ أ جـ > أ ب وهو المطلوب



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



متباينة المثلث

فكر وناقش

سوف تتعلم
- متباينة المثلث.

المصطلحات الأساسية
- متباينة.
- متباينة المثلث.



باستخدام المسطرة المدرجة والفرجار، حاوِلْ رسم المثلث أ ب جـ حيث:

١ أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٥سم ، أ جـ = ٦سم
٢ أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٣سم ، أ جـ = ٢سم
٣ أ ب = ٩سم ، ب جـ = ٤سم ، أ جـ = ٣سم
٤ أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٣سم ، أ جـ = ٥سم

فى أىٍّ من الحالاتِ السابقة أمكنك رسم المثلث، وماذا تستنتج؟

حقيقة: فى أى مثلثٍ يكون مجموعُ طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أى أن: فى أى مثلث أ ب جـ يكون:

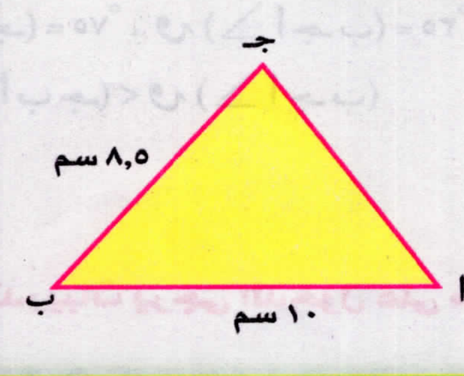
أ ب + ب جـ > أ جـ
ب جـ + جـ أ > أ ب
أ ب + أ جـ > ب جـ

(شكل: مثلث أ ب جـ)

فمثلاً: الأعداد ٥، ٣، ٩ لاتصلح أن تكونَ أطوالَ أضلاع مثلث؛ لأن مجموع أصغر عددين = ٣ + ٥ = ٨ ، ٨ < ٩ ولاتحقق متباينة المثلث.




مثال



فى المثلث أ ب جـ إذا كان أ ب = ١٠ سم،
ب جـ = ٨,٥ سم
أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع $\overline{أجـ}$.

الحل

أ جـ < أ ب + ب جـ ∴ أ جـ < ١٨,٥ (١)

لكن أ جـ + ب جـ > أ ب متباينة المثلث

أ جـ > أ ب - ب جـ ∴ أ جـ > ١,٥ (٢)

من (١)، (٢) ١٨,٥ > أ جـ > ١,٥

∴ أ جـ ∈]١,٥ ، ١٨,٥[

تدرب

أوجد الفترةَ التى ينتمى إليها طولُ الضلِّع الثالث لكلٍّ من المثلثات التالية إذا كان طولا الضِّلعين الآخرين هما:

أ ٦سم، ٩سم ب ٥سم، ١٢سم جـ ٧سم، ١٥سم د ٢,٩ سم، ٣,٢ سم

الحل

أ ∵متبانية المثلث

تنص على أن: مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث

∴ الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث =]٣ ، ١٥[

لاحظ : لا يمكن اختيار طول الضلع الثالث = ٣ سم (لماذا)

لا يمكن اختيار طول الضلع الثالث = ١٥ سم (لماذا)

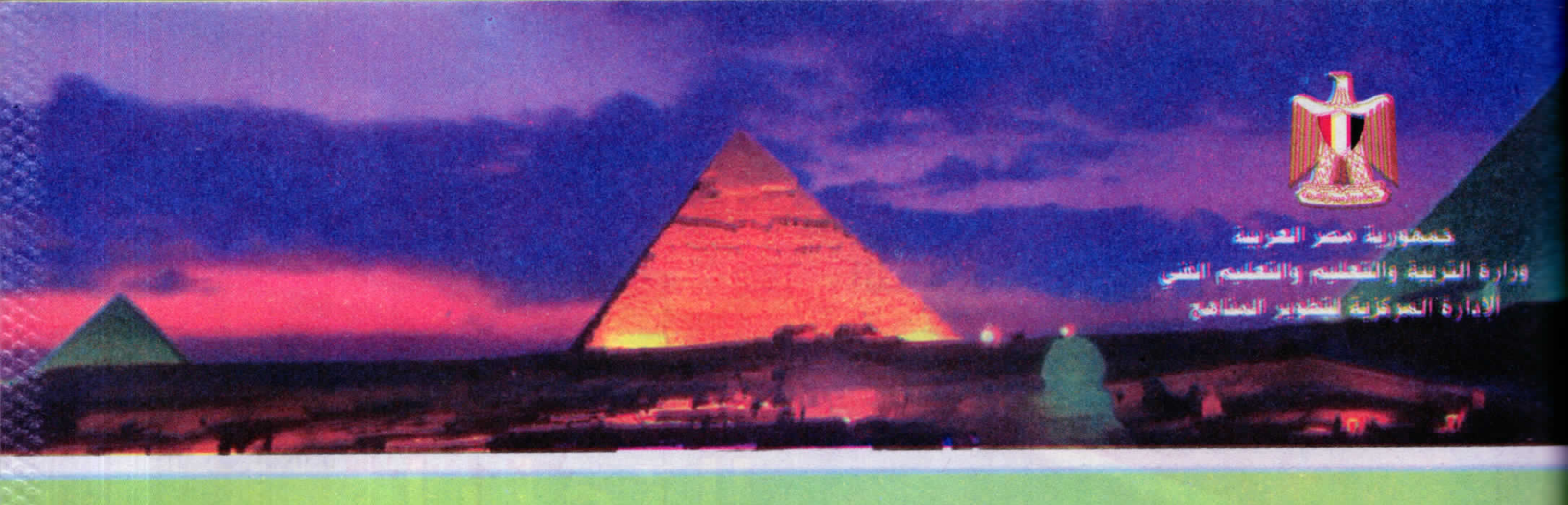


ناقِشْ معلمك لإستكمال حلول

(ب) . (جـ) . (د)

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني





الفصل الدراسي الثاني

المحتويات

الوحدة الأولى: التحليل

الوحدة الثانية: القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة فى ح

الوحدة الثالثة: الاحتمال

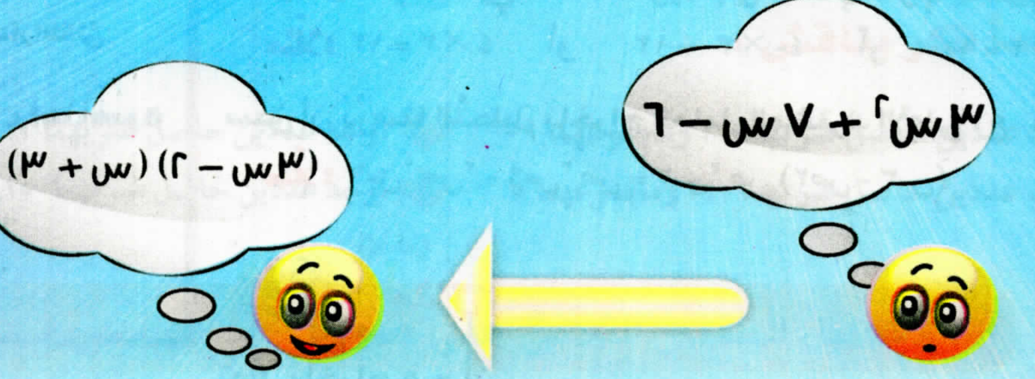
الوحدة الرابعة: المساحات

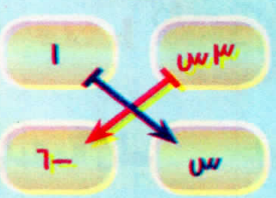
الوحدة الخامسة: التشابه وعكس فيثاغورث واقليدس

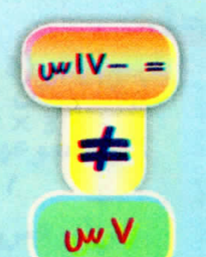
الوحدة الأولى

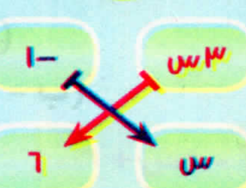
١

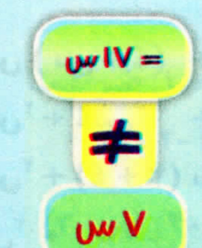
التحليل

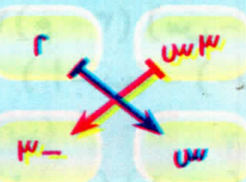


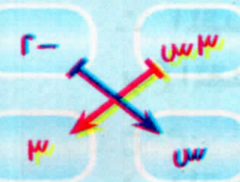








الوحدة الأولى

الدرس الأول

تحليلُ المقدارِ الثلاثيِّ

فكّر وناقِش

سوف تتعلّم

- معنى تحليل مقدار جبرى.
- تحليلُ المقدار الثلاثيّ.

مصطلحات أساسية

- تحليل.
- مقدار جبريّ.
- مقدار ثلاثيّ.

سبق أن تعلمت أنَّ:

تحليلُ أيِّ عددٍ صحيحٍ معناه تحويلُه إلى حاصلِ ضربِ عاملينِ أو أكثر

مثلًا: ١٢ = ٣ × ٤ أو ١٢ = -٣ × -٤ أو ١٢ = ٢ × ٦ ، ...

سبق أن درسنا التَّحليلَ بإخراج العاملِ المشترك الأعلى (ع. م. أ)

مثلًا: ٦س^٢ ص^٢ - ٩س^٢ ص = ٣س^٢ ص (٢ص - ٣س)

مثال

حلِّل بإخراجِ ع.م.أ:

١ ٢س (م + ٣) - ٤ص (م + ٣)

٢ أ (أ - ب) - ب (ب - أ)

الحل

أ) ع. م. أ = ٢ (م + ٣)

∴ المقدار = ٢ (م + ٣) (س - ٢ص)

ب) المقدار = (أ - ب) - (-ب) (أ - ب)

ع. م. = (أ - ب)

∴ المقدار = (أ - ب) (أ + ب)

نعلم أن: (س + ٣) (س + ٤) = س (س + ٤) + ٣ (س + ٤)

= س^٢ + ٤س + ٣س + ٣ × ٤

= س^٢ + (٤ + ٣) س + ١٢

= س^٢ + ٧س + ١٢

يسمّى المقدار (س^٢ + ٧س + ١٢) مقدارًا ثلاثيًا.

من خلالِ خطواتِ الضّربِ السّابقة وباستخدام خواصّ عمليّة الضّرب هل تستطيعُ تحليلَ المقدار ($س^٢ + ٧س + ١٢$) إلى عاملَين؟

حاصل الضرب ١٢	المجموع
١ × ١٢	١٣
-١ × -١٢	-١٣
٢ × ٦	٨
-٢ × -٦	-٨
٣ × ٤	٧
-٣ × -٤	-٧

أولاً: $س^٢$ تحلل إلى س × س

ثانيًا: نحاول البحثَ عن عددينِ حاصل ضربهما ١٢ ومجموعهما = ٧ وهما ٣ ، ٤

$س^٢ + ٧س + ١٢ = (س + ٣) (س + ٤)$



١ أوجد عددينِ حاصل ضربهما ٢٠ ومجموعهما ٩

٢ أوجد عددين حاصل ضربهما ١٢ ومجموعهما -٨

٣ أوجد عددين حاصل ضربهما -٢٤ ومجموعهما ٥

٤ أوجد عددين حاصل ضربهما -١٥ ومجموعهما -١٤



أولًا: تحليلُ المقدارِ الثلاثيِّ على صورة $س^٢ + ب س + جـ$

يحلَّل هذا المقدارَ إلى عاملين.

- الحدُّ الأوّل في كلٍّ منهما س .
- الحدانِ الآخرانِ هما عددان حاصل ضربهما جـ ومجموعهما ب .

أمثلة



١ حلِّل المقدار: $س^٢ - ٥س + ٦$

الحل

نبحثُ عن عددينِ حاصل ضربهما ٦ ومجموعهما -٥ وهما -٢ ، -٣

$س^٢ - ٥س + ٦ = (س - ٢) (س - ٣)$

٢ حلِّل المقدار: $س^٢ - ٥س - ٦$

الحل

نبحث عن عددين حاصل ضربهما -٦ ومجموعهما -٥ وهما ١ ، -٦

$س^٢ - ٥س - ٦ = (س + ١) (س - ٦)$

٣ حلّل المقدار: $٣ ص^٢ - ٤٨ + ١٨ ص$

الحل

١ يجب ترتيبُ حدودِ المقدار حسبَ قوى ص تنازليًا، **فيكون المقدار** $= ٣ص^٢ + ١٨ص - ٤٨$

٢ نلاحظُ وجودَ عاملٍ مشتركٍ بين حدودِ المقدار وهو ٣، **فيكون المقدار** $= ٣ (ص^٢ + ٦ص - ١٦)$

٣ نبحثُ عن عددينِ حاصل ضربهما -١٦ ومجموعهما ٦ وهما -٢، ٨

∴ **المقدار** = ٣ (ص - ٢) (ص + ٨)

٤ حلّل المقدارَ: $م^٤ - ٦م^٢ ن + ٥ن^٢$

الحل

١ $م^٤$ تحلل إلى $م^٢ × م^٢$

٢ نبحثُ عن عددينِ حاصل ضربهما ($٥ن^٢$) ومجموعهما (-٦ن) وهما -ن ، -٥ن

المقدار = ($م^٢$ - ن) ($م^٢$ - ٥ن)

ثانيًا: تحليلُ المقدارِ الثلاثيِّ على صورةِ $أ س^٢ + ب س + جـ$ عندما $أ ≠ ±١$

نعلم أن: (٢س - ٣) (٥س + ٤) = $١٠س^٢$ + ((٨س + (-١٥س)) + (-١٢)

٢س × ٥س — حاصلُ ضرب الطرفين + حاصل ضرب الوسطين — -٣ × ٤

اى أن (٢س - ٣) (٥س + ٤) = $١٠س^٢$ - ٧س - ١٢

وبالعكس لتحليلِ المقدار الثلاثى $١٠س^٢$ - ٧س - ١٢ نجرى عدةَ محاولاتٍ للوصولِ إلى التَّحليلِ الصَّحيح ، ويمكن الاستعانةُ بالشّكلِ المقابل.



الحد الأوسط = ٢ س × ٤ + (-٣) × ٥س

= -٧س

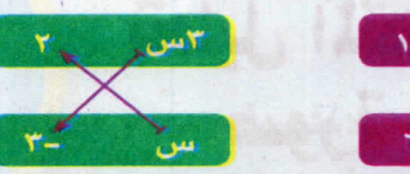
$١٠س^٢$ - ٧س - ١٢ = (٢س - ٣)(٥س + ٤)

مثال ١ **حلّل المقدار** $٣س^٢ + ٧س - ٦$

الحل

نلاحظ أن $٣س^٢$ = ٣س × س بينما(-٦)تحلل إلى ١ ×(-٦)أو(-١)× ٦ أو ٢ ×(-٣)أو(-٢)× ٣ ونلاحظ المحاولاتِ الآتيةَ للوصولِ إلى الحلِّ الصَّحيح:





شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

في شكل (١): ٣س × (-٦) + س × ١ = -١٧س ≠ الحد الأوسط.

في شكل (٢): ٣س × ٦ + س × (-١) = ١٧س ≠ الحد الأوسط.

في شكل (٣): ٣س × (-٣) + س × ٢ = -٧س ≠ الحد الأوسط.

في شكل (٤): ٣س × ٣ + س × (-٢) = ٧س = الحد الأوسط.

∴ ٣س^{٢} + ٧س - ٦ = (٣س - ٢) (س + ٣)



مثال ٢

حلّل المقدارَ ١٥س^{٤} - ٢١ ع^{٢} - ٦س^{٢}ع

الحل



١ المقدارُ بعد ترتيبه، هو: ١٥س^{٤} - ٦س^{٢}ع - ٢١ع^{٢} نلاحظ وجود ٣ عامل مشترك أعلى.

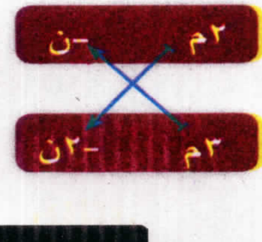
∴ المقدار = ٣ (٥س^{٤} - ٢س^{٢}ع - ٧ ع^{٢}).

٢ ∵ الحدُّ الثالث سالبًا. ∴ إشارتا عاملي العدد -٧ ع^{٢} مختلفتان.

∴ المقدار = ٣ (٥س^{٢} - ٧ع) (س^{٢} + ع)



مثال (٣)



حلّل المقدارَ ٦م^{٢} + ن (٢ ن - ٧م)

الحل

المقدار = ٦م^{٢} + ٢ن^{٢} - ٧ن م = ٦م^{٢} - ٧ن م + ٢ن^{٢}

= (٢م - ن) (٣م - ٢ن)

لاحظ أن: يمكن التحققُ من صحةِ الحلِّ بضربِ القوسينِ بمجردِ النَّظرِ للحصُولِ على المقدارِ الأصليِّ قبل التَّحليل.



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

الوحدة الأولى

الدرس الثانى

تحليل المقدار الثلاثى على صورة المربع الكامل

فكّر وناقِشْ

سوف تتعلم

- تحليلُ المقدارِ الثلاثىّ على صورة المربع الكامل.

مصطلحات أساسية

- مربع كامل.

سبق أن تعلمت أن:

(٢س - ٣)^{2} = ٤س^{2} - ١٢س + ٩

(٥ص + ٧س)^{2} = ٢٥ص^{2} + ٧٠س ص + ٤٩س^{2}

(ل^{2} - ٥م)^{2} = ل^{4} - ١٠ل^{2}م + ٢٥م^{2}

تسمى كلٌّ من المقادير ٤س^{2} - ١٢س + ٩ ، ٢٥ص^{2} + ٧٠س ص + ٤٩س^{2} ، ل^{4} - ١٠ل^{2}م + ٢٥م^{2} **مربعًا كاملاً**

ونلاحظ أن

١ كلًّا من الحدينِ الأول والثالث مربع كامل.

٢ الحد الأوسط = ± ٢ × الجذر التربيعىّ للحدِّ الأول × الجذر التربيعى للحد الثالث

ويكون تحليلُ المقدارِ الثلاثىِّ المربع الكامل على الصورة:

المقدار الثلاثى المربع الكامل =

(√الحد الأول ± √الحد الثالث)^{2}

(± : إشارة الحد الأوسط)

مثلا: ٩ س^{2} - ٣٠س + ٢٥ = (√٩س^{2} - √٢٥)^{2} = (٣س - ٥)^{2}

ل^{4} + ١٤ ل^{2}م + ٤٩م^{2} = (√ل^{4} + √٤٩م^{2})^{2} = (ل^{2} + ٧م)^{2}

لاحظ:

١ إخراج العاملِ المشترك الأعلى بين حدودِ المقدار إن وجد.

٢ ترتيب حدود المقدار تنازليًا حسب قوى أحد الرموز.



مثال ١

بين أيًا من المقادير الآتية يكون مربعًا كاملًا، ثم حلّل المقدارَ الذى على صورةِ مربعٍ كاملٍ:

أ ٢٥س^٢ - ٣٠س + ٩ ب م^٢ + ٤م - ٤ جـ ٤٩أ^٢ + ٧٠أب^٢ + ٢٥ب^٤

الحل

أ ٢٥س^٢ = (٥س)^٢ ، ٩ = (٣)^٢ كل من الحدين الأول والثالث مربع كامل

٢ × ٥س × ٣ = ٣٠س = الحد الأوسط

∴ المقدار ٢٥س^٢ - ٣٠س + ٩ مربع كامل ويكون المقدار = (٥س - ٣)^٢

ب المقدار م^٢ + ٤ م - ٤ ليس مربعًا كاملًا لأن الحدَّ الثالثَ سالبٌ.

جـ الحدُّ الأولُ = ٤٩ أ^٢ = (٧أ)^٢ مربعٌ كاملٌ ، الحد الثالث = ٢٥ب^٤ = (٥ب^٢)^٢ مربعٌ كاملٌ

٢ × ٧أ × ٥ب^٢ = ٧٠أب^٢ = الحد الأوسط.

∴ المقدار ٤٩أ^٢ + ٧٠ أب^٢ + ٢٥ب^٤ مربع كامل، ويكون المقدار = (٧أ + ٥ب^٢)^٢



مثال ٢

أكمل الحدَّ الناقصَ فى كلٍّ من المقاديرِ الآتية ليكون المقدارُ مربعًا كاملًا ثم حلّل المقدار.

أ ٤ص^٢ + ... + ١٢١ ب ٢٥أ^٢ - ٣٠ أب ......

الحل

أ الحدُّ الأوسط = ± ٢ ($\sqrt{\text{الحد الأول}}$ × $\sqrt{\text{الحد الثالث}}$) = ± ٢ × ٢ص × ١١ = ± ٤٤ص

∴ المقدار = ٤ص^٢ ± ٤٤ص + ١٢١ ويكون المقدار = (٢ص ± ١١)^٢

ب ٢٥أ^٢ = (٥أ)^٢

الحدُّ الأوسط = -٣٠أب = ٢ × ٥أ × الجذر التربيعى للحد الثالث

الجذر التربيعىُّ للحدِّ الثالث = $\frac{-٣٠ أب}{٢ × ٥أ}$ = -٣ب

الحد الثالث = (-٣ب)^٢ = ٩ب^٢

∴ المقدار = ٢٥أ^٢ - ٣٠أب + ٩ب^٢ ويكون المقدار = (٥أ - ٣ب)^٢



مثال ٣

استخدم التَّحليلَ لتسهيلِ حساب قيمة: (٧,٣)^{٢} + ٢ × ٧,٣ × ٢,٧ + (٢,٧)^{٢}

الحل

نلاحظُ أن المقدارَ المعطى على صورةِ مقدارٍ ثلاثيٍّ مربع كاملٍ، ولذلك يمكنُ كتابتُه بالصورةِ

المقدار = (٧,٣ + ٢,٧)^{٢} = (١٠)^{٢} = ١٠٠



مثال ٤

حلِّل كلًّا من المقاديرِ الآتية:

أ ٥س^{٣} + ٥٠س^{٢} + ١٢٥س　　ب ٤٠أ^{٢}ب - ٥٠أ^{٤} - ٨ب^{٢}　　جـ) ٢٤ص + ٢٤ص٢ + ٦ص٣

الحل

أ بإخراج ع.م.أ

∴ المقدار = ٥س (س^{٢}+١٠س + ٢٥) = ٥س (س + ٥)^{٢}

ب المقدار = ٢(٢٠أ^{٢}ب - ٢٥أ^{٤} - ٤ب^{٢})　　وبترتيب المقدار حسبَ قوى أ التنازلية

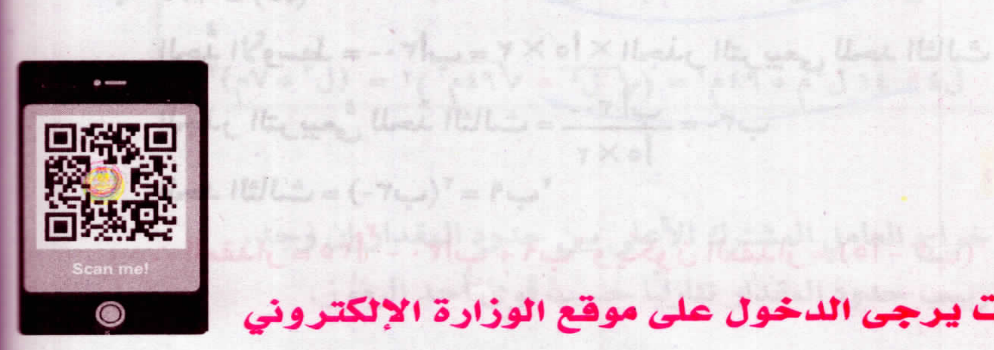
= -٢(٢٥أ^{٤} - ٢٠أ^{٢}ب + ٤ب^{٢})

= -٢(٥أ^{٢} - ٢ب)^{٢}

جـ) المقدار = ٦ص (٤ + ٤ص + ص٢) وبترتيب المقدار حسب قوى س التنازلية

= ٦ص (ص٢ + ٤ص + ٤)

= ٦ص (ص + ٢)^{٢}



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



تحليلُ الفرقِ بين المربَّعيَن

فكّر وناقِش

سوف تتعلم

- تحليلُ الفرق بين مربعين.

مصطلحات أساسية

- الفرقُ بين مربعين.

سبق أن تعلمت أن:

(س + ص) (س - ص) = س^{٢} - ص^{٢}

يسمى المقدار س^{٢} - ص^{٢} فرقًا بين مربعين

الفرق بين مربعى كميتين = مجموعُ الكميتين × الفرق بينهما.

س^{٢} - ص^{٢} = (س + ص) (س - ص)



مثال ١

حلّل كلًا من المقاديرِ الآتية:

أ ٤٩س^{٢} - ٢٥ ب (٢ص - ٣)^{٢} - ١

جـ ٢٧م^{٣} - ٤٨م ن^{٦} د (س + ص)^{٢} - (س - ص)^{٢}

الحل

أ ٤٩س^{٢} - ٢٥ = (٧س + ٥) (٧س - ٥)

ب (٢ص - ٣)^{٢} -١ = [(٢ص - ٣) + ١] [(٢ص - ٣) - ١]

= (٢ص - ٢) (٢ص - ٤)

= ٢(ص - ١) × ٢ (ص - ٢) = ٤ (ص - ١) (ص - ٢)

جـ ٢٧م^{٣} - ٤٨م ن^{٦} = ٣م (٩م^{٢} - ١٦ن^{٦})

= ٣م (٣م + ٤ن^{٣}) (٣م - ٤ن^{٣})

د (س + ص)^{٢} - (س - ص)^{٢} = [(س + ص) + (س - ص)] [(س + ص) - (س - ص)]

= ٢س × ٢ص

= ٤س ص



أمثلة

٢ استخدم التَّحليلَ لتسهيلِ إيجاد قيمة كلٍّ من:

أ $(٧٦٣)^٢ - (٢٣٧)^٢$ ب $(٩٩٩)^٢ - ١$

الحل

أ المقدار = (٧٦٣ + ٢٣٧) (٧٦٣ - ٢٣٧) = ١٠٠٠ × ٥٢٦ = ٥٢٦٠٠٠

ب المقدار = (٩٩٩ + ١) (٩٩٩ - ١) = ١٠٠٠ × ٩٩٨ = ٩٩٨٠٠٠

٣ حلِّل المقدار $٨١س^٤ - ١٦ص^٤$

الحل

$٨١س^٤ - ١٦ص^٤ = (٩س^٢ + ٤ص^٢) (٩س^٢ - ٤ص^٢)$

$= (٩س^٢ + ٤ص^٢) (٣س + ٢ص) (٣س - ٢ص)$

٤ استخدم التحليل فى إيجاد ناتج المقدار:

$٢ × (٢٦,١٨)^٢ - ٢ × (٢٣,٨٢)^٢$

الحل

المقدار $= ٢ \left[(٢٦,١٨)^٢ - (٢٣,٨٢)^٢ \right]$

= ٢(٢٦,١٨ - ٢٣,٨٢) (٢٦,١٨ + ٢٣,٨٢)

= ٢(٢,٣٦) (٥٠)

= ١٠٠ × ٢,٣٦ = ٢٣٦



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

الوحدة الأولى

الدرس الرابع

تحليلُ مجموع المكعبين والفرق بينهما

فكّر وناقِش

سوف تتعلم

- تحليل مجموع المكعبين.
- تحليل الفرق بين مكعبين.

مصطلحات أساسية

- مجموع مكعبين.
- الفرق بين مكعبين.

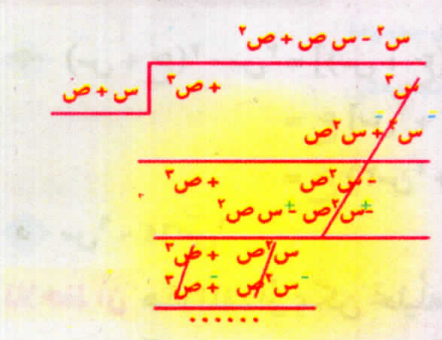
تحليلُ مجموع المكعبين

سأل المعلم الطالب: هل نستطيع تحليل $س^٣ + ص^٣$؟

فكر الطالب وأجاب: أتوقع أن يكون أحد العاملين (س + ص)

قال المعلمُ: هل يمكنك معرفةُ العامل الآخر فى $س^٣ + ص^٣$

أجاب الطالب: لمعرفة العامل الآخر فى $س^٣ + ص^٣$
نقسِّم $(س^٣ + ص^٣) \div (س + ص)$ باستخدام القسمة المطولة السابق دراستها.
ويكون خارج القسمة $س^٢ - س ص + ص^٢$



المقدار $س^٣ + ص^٣$ يسمى مجموع مكعبين ويحلل كالآتى:

$$س^٣ + ص^٣ = (س + ص)(س^٢ - س ص + ص^٢)$$

مثلاً:

$٨س^٣ + ٢٧ = (٢س)^٣ + (٣)^٣ = (٢س + ٣)\left((٢س)^٢ - ٢س \times ٣ + (٣)^٢\right)$

$= (٢س + ٣)(٤س^٢ - ٦س + ٩)$

تحليلُ الفرقِ بين المكعبين

المقدار $س^٣ - ص^٣$ يسمى فرقًا بين مكعبين، ويمكن استنتاجُ تحليلهِ:

$س^٣ - ص^٣ = س^٣ + (-ص)^٣$

$= (س + (-ص))\left((س^٢ - س(-ص) + (-ص)^٢\right)$

$$\therefore س^٣ - ص^٣ = (س - ص)(س^٢ + س ص + ص^٢)$$

مثلاً: $١٢٥ أ^٣ - ب^٦ = (٥أ)^٣ - (ب^٢)^٣$

$= (٥أ - ب^٢) (٢٥أ^٢ + ٥ أ ب^٢ + ب^٤)$



أمثلة

١ حلِّل كلًّا من المقاديرِ الآتية:

أ $س^٣ + ٣٤٣ص^٣$ ب $٤٠أ^٣ + ١٣٥ب^٣$

جـ $(س + ع)^٣ - س^٣$ د $س^٦ - ٦٤ص^٦$

الحل

أ $س^٣ + ٣٤٣ص^٣ = (س)^٣ + (٧ص)^٣$

$= (س + ٧ص) (س^٢ - ٧س ص + ٤٩ص^٢)$

ب $٤٠أ^٣ + ١٣٥ب^٣ = ٥ (٨أ^٣ + ٢٧ب^٣) = ٥ [(٢أ)^٣ + (٣ب)^٣]$

$= ٥ (٢أ + ٣ب) (٤أ^٢ - ٦ أ ب + ٩ب^٢)$

جـ $(س + ع)^٣ - س^٣ = [(س + ع) - س][(س + ع)^٢ + س(س + ع) + س^٢]$

$= ع [س^٢ + ٢ س ع + ع^٢ + س^٢ + س ع + س^٢]$

$= ع (٣س^٢ + ٣س ع + ع^٢)$

د $س^٦ - ٦٤ص^٦$

نلاحظ أن هذا المقدارُ يمكن تحليلُه كفرق بين مربعين، ويمكن تحليلُه كفرقٍ بين مكعبين، ويجب تحليلُه أولاً كفرقٍ بين مربعين، ثم تحليل كلٍّ من العاملَينِ الناتجين.

$س^٦ - ٦٤ص^٦ = (س^٣ + ٨ص^٣) (س^٣ - ٨ص^٣)$

$= (س + ٢ص) (س^٢ - ٢س ص + ٤ص^٢) (س - ٢ص) (س^٢ + ٢س ص + ٤ص^٢)$

٢ إذا كان $س^٢ - ص^٢ = ٢٠$ ، $س - ص = ٢$، $س^٢ - س ص + ص^٢ = ٢٨$، **أوجد قيمة** $س^٣ + ص^٣$

الحل

$س^٢ - ص^٢ = ٢٠$ ∴ $(س - ص) (س + ص) = ٢٠$

لكن $س - ص = ٢$ ∴ $٢(س + ص) = ٢٠$ ∴ $س + ص = ١٠$ (١)

$س^٣ + ص^٣ = (س + ص) (س^٢ - س ص + ص^٢)$

$= ١٠ \times ٢٨ = ٢٨٠$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



التحليل بالتقسيم

فكّر وناقش

التحليل بالتقسيم

مصطلحات أساسية

التحليل بالتقسيم.

لتحليلِ مقدارٍ جبريٍّ مكونٍ من أكثر من ثلاثةِ حدود مثل:

٢اس + اص + ٢ب س + ب ص

نلاحظُ عدمَ وجود عاملٍ مشتركٍ بين جميع حدوده ، وأنه ليس على إحدى الصور السابقة ، ولذلك نحاولُ تقسيمه إلى مجموعاتٍ بين كلٍّ منها عاملٌ مشتركٌ.

المقدار = ٢ أس + أ ص + ٢ب س + ب ص — تم تقسيم المقدار إلى مجموعتين

= أ (٢س + ص) + ب(٢س + ص) — أخرجنا ع.م.أ من كل مجموعة

= (٢س + ص) (أ + ب) — أخرجنا (٢س + ص) ع.م.أ للمجموعتين

لاحظ أن:

يمكن إجراءُ التقسيم بطريقةٍ أخرى كمايلى:

المقدار = ٢ أ س + ٢ب س + أ ص + ب ص — خاصية الإبدال

= ٢س (أ + ب) + ص (أ + ب)

= (أ + ب) (٢س + ص)

مثال (١)

حلّل كلًا من المقادير الآتية:



أ س^٣ + ٢س^٢ - س - ٢ ب ١٦س^٢ - أ^٢ + ٦ أ ب - ٩ب^٢

جـ ١ - س^٢ - ٤س ص - ٤ص^٢

الحل

أ **المقدار** = س^٣ + ٢س^٢ + (- س -٢)

= س^٢ (س + ٢) - (س + ٢)

∴ **المقدار** = (س + ٢) (س^٢ - ١)

= (س + ٢) (س + ١) (س - ١)

ب نلاحظ عدم وجود علاقة بين الحد الأول وباقي الحدود؛ ولذا يمكن تقسيمها كالآتي:

المقدار = ١٦س^٢ - (أ^٢ - ٦أب + ٩ب^٢)

= ١٦س^٢ - (أ - ٣ب)^٢

= [٤س + (أ - ٣ب)] [٤س - (أ - ٣ب)] = (٤س + أ - ٣ب) (٤س - أ + ٣ب)

جـ **المقدار** = (١) - (س^٢ + ٤س ص + ٤ص^٢)

= ١ - (س + ٢ص)^٢

= (١ - س - ٢ص) (١ + س + ٢ص)

مثال (٢)

(٢) حل كلاً ممايأتي تحليلاً كاملاً:

أ س(ع - ص) + ل (ص - ع)

ب س^٣ - س^٢ + س - ١

الحل

أ المقدار = س(ع - ص) - ل (ع - ص)

= (ع - ص) (س - ل)

ب المقدار = (س^٣ - س^٢) + (س - ١)

= س^٢ (س - ١) + (س - ١)

= (س - ١) (س^٢ + ١)

حل آخر:

المقدار = (س^٣ - ١) - (س^٢ - س)

= (س - ١) (س^٢ + س + ١) - س (س - ١)

= (س - ١) (س^٢ + س + ١ - س)

= (س - ١) (س^٢ + ١)



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



التحليل بإكمال المربع

فكّر وناقِش

سوف تتعلم

- التحليل بإكمال المربع.

مصطلحات أساسية

- إكمال المربع.

سبق أن تعلّمت أن:

المربعُ الكاملُ يكون على الصورة $أ^2 \pm 2أب + ب^2$ ويحلّل بالصورة $(أ \pm ب)^2$

وتوجد بعضُ المقادير لاتكون على صورة مربعٍ كاملٍ، يمكن إكمالُ المقدار ليكون مربعًا كاملًا .

مثال ١

حلِّ المقدارَ: $س^4 + 4ص^4$

الحل

هذا المقدارُ لانستطيع تحليلَه بما سبق دراسته من طرق التحليل، ولكي تحصلَ على مربعٍ كاملٍ يجب إضافة الحد $2 \times \sqrt{س^4} \times \sqrt{4ص^4}$ أي $4س^2ص^2$

المقدار $= س^4 + 4س^2ص^2 + 4ص^4 - 4س^2ص^2$

$= (س^2 + 2ص^2)^2 - 4س^2ص^2$

$= [(س^2 + 2ص^2) - 2س ص]\ [(س^2 + 2ص^2) + 2س ص]$

$= (س^2 - 2س ص + 2ص^2)\ (س^2 + 2س ص + 2ص^2)$

مثال ٢

حلِّ المقدار: $9أ^4 - 13أ^2ب^2 + 4ب^4$

الحل

المقدار $= (3أ^2)^2 - 13أ^2ب^2 + (2ب^2)^2$ ليكون مربعًا كاملًا يجب أن يكون:

الحد الأوسط $= \pm 2 \times 3أ^2 \times 2ب^2 = \pm 12أ^2ب^2$



المقدار $= (٣أ^{٢})^{٢} - ١٢أ^{٢}ب^{٢} + (٢ب^{٢})^{٢} - أ^{٢}ب^{٢}$

$= (٣أ^{٢} - ٢ب^{٢})^{٢} - أ^{٢}ب^{٢}$

$= (٣أ^{٢} - ٢ب^{٢} - أب)\ (٣أ^{٢} - ٢ب^{٢} + أب)$

$= (٣أ^{٢} - أب - ٢ب^{٢})\ (٣أ^{٢} + أب - ٢ب^{٢})$

$= (٣أ + ٢ب)\ (أ - ب)\ (٣أ - ٢ب)\ (أ + ب)$

حل أخر

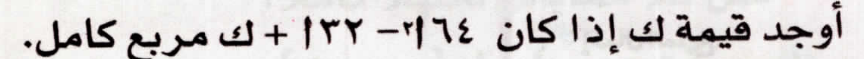
نلاحظُ أن المقدارَ $٩أ^{٤} - ١٣أ^{٢}ب^{٢} + ٤ب^{٤}$ يمكن تحليلُه كمقدارٍ ثلاثيٍّ.

المقدار $= (٩أ^{٢} - ٤ب^{٢})\ (أ^{٢} - ب^{٢})$

$= (٣أ + ٢ب)\ (٣أ - ٢ب)\ (أ + ب)\ (أ - ب)$

وهو نفس التحليلِ السابق مع استخدام خاصيّة الإبدال.

مثال (٣)



أوجد قيمة ك إذا كان $٦٤أ^{٢} - ٣٢أ + ك$ مربع كامل.

الحل

$\because$ $٦٤أ^{٢} - ٣٢أ + ك$ مربع كامل (١)

$\therefore$ المقدار $= (٨أ - \sqrt{ك})^{٢}$

$= ٦٤أ^{٢} - ١٦أ\sqrt{ك} + ك$ (٢)

من (١) ، (٢)

$١٦أ\sqrt{ك} = ٣٢أ$

بقسمة الطرفين علي ١٦أ

$\therefore \sqrt{ك} = ٢$

بتربيع الطرفين

$\therefore ك = ٤$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



حل المعادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريا

فكِّر وناقِش

سوف تتعلم

- حلُّ معادلةٍ من الدرجة الثانية فى متغير واحد.

مصطلحات أساسية

- معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- جذور المعادلة.
- حل معادلة.

سبق أن تعلمت أنَّ:

إذا كان ا ، ب عددين حقيقيين وكان ا × ب = صفر فإن:

ا = صفر أو ب = صفر

مثلاً: إذا كان (س - ٥) (س + ٢) = ٠ (١)

فإن: س - ٥ = ٠ أو س + ٢ = ٠

∴ س = ٥ أو س = -٢

لاحظ أن:

١ كلًّا من س = ٥ ، س = -٢ يسمى جذرًا للمعادلة (١)

٢ مجموعة حل المعادلة هى {٥، -٢}

مثال ١

أوجد مجموعةَ الحل للمعادلة ٢س^{٢} - ٥س - ٣ = ٠ فى ح

الحل

بتحليلِ الطرفِ الأيمن، تكون المعادلة بالصورة الآتية:

(٢س + ١) (س - ٣) = ٠

٢س + ١ = ٠ أو س - ٣ = ٠

٢س = -١ أو س - ٣ = ٠

س = $\frac{-١}{٢}$ أو س = ٣

∴ مجموعة الحل هى {$\frac{-١}{٢}$، ٣}

لاحظ أن:

يمكن التحققُ من صحَّةِ الحلِّ بالتَّعويض عن قيمةِ س فى المعادلة الأصلية:

عند س = $\frac{-1}{2}$ ∴ الطرف الأيمن = ٢ $(\frac{-1}{2})^2$ - ٥ $(\frac{-1}{2})$ - ٣

= ٢ × $\frac{1}{4}$ + $\frac{5}{2}$ - ٣ = ٣ - ٣ = ٠ = الطرف الأيسر

عند س = ٣ ∴ الطرف الأيمن = ٢ $(3)^2$ - ٥ (٣) - ٣

= ١٨ - ١٥ - ٣ = ٠ = الطرف الأيسر

∴ كلٌ من $\frac{-1}{2}$، ٣ تحقق المعادلة



مثال ٢

أوجد فى ح مجموعةِ حل المعادلة ٢$س^3$ = ١٨س

الحل

نكتب المعادلةَ بالصُّورة ٢$س^3$ - ١٨س = ٠ ويمكن تحليلُها.

٢س ($س^2$ - ٩) = ٠ أى ٢س (س - ٣) (س + ٣) = ٠

∴ ٢س = ٠ أو س - ٣ = ٠ أو س + ٣ = ٠

س = ٠ أو س = ٣ أو س = -٣

∴ مجموعة الحل فى ح هى {٠، ٣، -٣}، تحقق من صحة الحل.



مثال ٣

أوجد العددَ الحقيقيَّ الذى ضعفه يزيد عن معكوسه الضَّربى بمقدارِ الواحد الصحيح.

الحل

نفرض أن العدد = س (س ≠ ٠)

ضعف العدد = ٢ س

المعكوس الضربى للعدد = $\frac{1}{س}$

∵ ضعف العدد يزيد عن المعكوس الضربى بمقدار الواحد الصحيح.

∴ ٢ س - $\frac{1}{س}$ = ١

بضرب طرفى المعادلة فى س

٢س^{٢} - ١ = س

٢س^{٢} - س - ١ = ٠

(٢س + ١) (س - ١) = ٠

٢س + ١ = ٠ أو س - ١ = ٠

٢س = -١

س = $\frac{-١}{٢}$ أو س = ١

التحقق:
ضعف العدد = -١
المعكوس الضربى = -٢

التحقق:
ضعف العدد ٢
المعكوس الضربى = ١

واضح أنه فى الحالتينِ ضعف العدد يزيد عن المعكوس الضربى بمقدار ١



مثال ٤

مستطيل يزيدُ طولُه عن عرضه بمقدار ٤سم فإذا كانت مساحتُه ٢١سم^{٢} فأوجد بعديه.

الحل

نفرض أن عرض المستطيل = س سم

∴ الطول = (س + ٤) سم

س (س + ٤) = ٢١

س^{٢} + ٤س - ٢١ = ٠

(س - ٣)(س + ٧) = ٠

س - ٣ = ٠ أو س + ٧ = ٠

س = ٣ أوس = -٧ (وهو مرفوض لأنه سالب)

∴ عرض المستطيل = ٣سم ، طوله = ٣ + ٤ = ٧سم

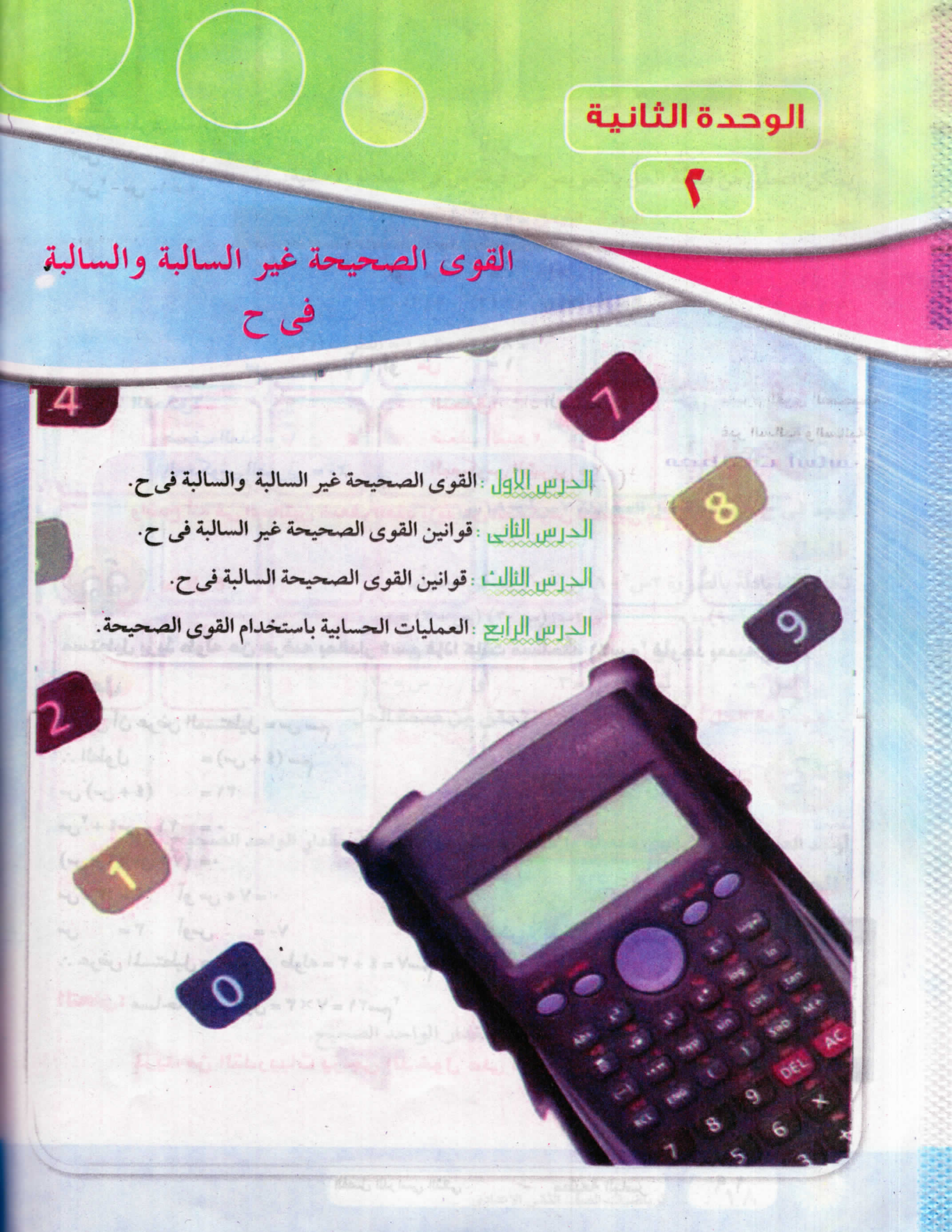
التحقق: مساحة المستطيل = ٣ × ٧ = ٢١سم^{٢}

س + ٤

س

Scan me!

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الوحدة الثانية

٢

القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة فى ح



القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة فى ح

فكّر وناقش

سوف تتعلم

- مفهوم القوى الصحيحة غير السالبة و السالبة.

مصطلحات أساسية

- $ح^*$ مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.
- قوى صحيحة غير سالبة فى ح.
- قوى صحيحة سالبة فى ح.
- معادلة أسية فى ح.

أولاً: القوى الصحيحة غير السالبة:

سبق أن درست **القوى الصحيحة فى مجموعة الأعداد النسبية ن:**

لاحظ أن:

(١) $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

(٢) $\frac{-٢}{٣} \times \frac{-٢}{٣} \times \frac{-٢}{٣} \times \frac{-٢}{٣} = \left(\frac{-٢}{٣}\right)^{٤}$

> **إذا كان** $أ \in ح$، $ن \in ص^+$ **فإن** $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times .... \times أ$
> حيث أ مكرر كعامل ن من المرات.

أمثلة

(١) $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = (\sqrt{٢})^{٥} = ٤\sqrt{٢}$

(٢) $-\sqrt{٢} \times -\sqrt{٢} \times -\sqrt{٢} \times -\sqrt{٢} = (-\sqrt{٢})^{٤} = ٤$

(٣) $-\sqrt{٥} \times -\sqrt{٥} \times -\sqrt{٥} = (-\sqrt{٥})^{٣} = -٥\sqrt{٥}$

> **إذا كان** $أ \in ح^*$ **فإن** $أ^{صفر} = ١$

فمثلاً: $(\sqrt{٧})^{صفر} = ١$ ، $\left(\frac{-١}{\sqrt{١١}}\right)^{صفر} = ١$

ثانيًا: القوى الصحيحة السالبة

فكر و ناقش

علمت أن $٥^{٣} \times ٥^{-٣} = ٥^{٣-٣} = ٥^{٠} = ١$

فيكون: $س^{م} \times س^{-م} = ١$ حيث $س \neq ٠$ ، $م \neq ٠$

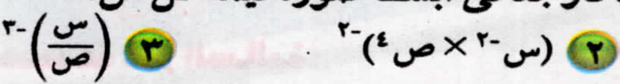
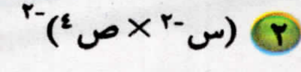
إذا كان $أ \in ح^*$ ، $ن \in ص^+$

فإن $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، $أ^{ن} = \frac{١}{أ^{-ن}}$

فمثلاً: $(\sqrt{٣})^{-٤} = \frac{١}{(\sqrt{٣})^{٤}} = \frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{(-\sqrt{٣})^{-٣}} = (-\sqrt{٣})^{٣} = -٣\sqrt{٣}$



إذا كانت س = ٣ ، ص = $\sqrt{٢}$ ، فأوجد فى أبسط صورة قيمة كل من:

(١) $س^{-٢} ص^{-٤}$ (٢) $(س^{-٢} \times ص^{٤})^{-٢}$ (٣) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-٣}$



(١) إذا كان $س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $ص = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $ع = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$. **فأوجد قيمة:** $س^{٢} + (س ع)^{٢} \times ص^{٢}$

الحل

المقدار $= س^{٢} + س^{٢} ع^{٢} ص^{٢} = س^{٢} (١ + ع^{٢} ص^{٢})$

$= \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} \times [١ + \left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}] = \frac{٣}{٤} \times [١ + \frac{٢}{٤} \times \frac{١}{٣}] = \frac{٣}{٤} \times \frac{٧}{٦} = \frac{٧}{٨}$

قاعدة هامة:

إذا كان $أ^{م} = أ^{ن}$ **فإن** م = ن لكل $أ \in ح - \{٠، ١، -١\}$

فمثلاً: إذا كان $(\sqrt{٢})^{س} = ٢\sqrt{٢}$ فإن $(\sqrt{٢})^{س} = (\sqrt{٢})^{٣}$ $\therefore$ س = ٣

إذا كان $أ^{ن} = ب^{ن}$ **فإن** أ = ب لكل $ن \in \{١، ٣، ٥، ...\}$ ، $|أ| = |ب|$ لكل $ن \in \{٢، ٤، ٦، ...\}$

فمثلاً: $س^{٥} = \frac{١}{٣٢}$ فإن $س^{٥} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}$ $\therefore$ $س = \frac{١}{٢}$



(٢) **أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ح:**

أ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \frac{١٢٥}{٢٧}$ ب $(٣)^{س-٣} = (\sqrt{٣})^{س+٥}$

الحل

أ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \frac{١٢٥}{٢٧}$ $\therefore$ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \left(\frac{٥}{٣}\right)^{٣}$ $\therefore$ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س+٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{-٣}$

$\therefore$ س + ٢ = -٣ $\therefore$ س = -٢ - ٣ $\therefore$ س = -٥ **فتكون مجموعة الحل هى** {-٥}

ب $\because$ $[(\sqrt{٣})^{٢}]^{(س-٣)} = (\sqrt{٣})^{س+٥}$ $\therefore$ $(\sqrt{٣})^{٢س-٦} = (\sqrt{٣})^{س+٥}$

$\therefore$ ٢س - ٦ = س + ٥ $\therefore$ س = ١١

مجموعة الحل هى {١١}

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

قوانين القوى الصحيحة غير السالبة فى ح

الوحدة الثانية

الدرس الثانى

فكّر وناقش

سوف تتعلم

- قوانين القوى الصحيحة غير السالبة فى ح.
- حل المسائل على القوى الصحيحة غير السالبة في ح.

مصطلحات أساسية

- قوى صحيحة غير سالبة.
- مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

أولاً:

$(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^4 = (\sqrt{3})^6$ ماذا تلاحظ؟

إذا كان $أ \in ح^*$، م، ن عددين صحيحين غير سالبين

فإن: $أ^م \times أ^ن = أ^{م+ن}$

تعميم:

إذا كان $أ \in ح^*$، م، ن، ....، ل أعدادًا صحيحة غير سالبة

فإن: $أ^م \times أ^ن \times .... \times أ^ل = أ^{م+ن+..........+ل}$

من القانون السابق نجد أن: $(\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^4 = (\sqrt{3})^{2+4} = (\sqrt{3})^6 = 27$

ثانيا: $(\sqrt{5})^7 \div (\sqrt{5})^3 = (\sqrt{5})^4 = 25$ ماذا تلاحظ؟

إذا كان $أ \in ح^*$، م، ن عددين صحيحين غير سالبين م $\geq$ ن

فإن: $أ^م \div أ^ن = أ^{م-ن}$

من القانون السابق نجد أن: $(\sqrt{5})^7 \div (\sqrt{5})^3 = (\sqrt{5})^{7-3} = (\sqrt{5})^4 = 25$

ثالثًا: $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{3})^2 = 2 \times 3 = 6$

إذا كان أ، ب $\in ح^*$، ن عددًا صحيحًا غير سالب

فإن: $(أ ب)^ن = أ^ن \times ب^ن$

تعميم:

إذا كان أ، ب، جـ، ......، ك $\in ح^*$، ن عددًا صحيحًا غير سالب

فإن: $(أ \times ب \times جـ \times .... \times ك)^ن = أ^ن \times ب^ن \times جـ^ن \times .... \times ك^ن$

رابعًا:

$$\left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}}\right)^{٤} = \frac{(\sqrt{٣})^{٤}}{(\sqrt{٥})^{٤}} = \frac{٩}{٢٥}$$

إذا كان ا، ب ∈ ح، فإن $\left(\frac{ا}{ب}\right)^{ن} = \frac{ا^{ن}}{ب^{ن}}$، ن عدد صحيح غير سالب حيث ب ≠ ٠ ، ا ≠ ٠

تعميم: إذا كان ا، ب، جـ، .... ، ك ∈ ح، ن عددًا صحيحًا غير سالب فإن:

$$\left(\frac{ا\, ب\, هـ \times .... \times ل}{جـ\, د\, و \times .... \times ك}\right)^{ن} = \frac{ا^{ن}\, ب^{ن}\, هـ^{ن} .... ل^{ن}}{جـ^{ن}\, د^{ن}\, و^{ن} .... ك^{ن}}$$ حيث إن أيًا من عوامل المقام ≠٠

خامسًا:

$(٢^{٢})^{٣} = (\quad ٢ \quad)^{٢} \times (\quad ٢ \quad)^{٢} \times (\quad ٢ \quad)^{٢} = (\quad ٢ \quad)^{٦}$.ماذا تلاحظ؟

إذا كان ا، ب ∈ ح، م، ن عددين صحيحين غير سالبين فإن $(ا^{م})^{ن} = ا^{م ن}$.

تعميم: إذا كان ا، ب، جـ، .... ، ك ∈ ح ، ن عدد صحيح غير سالب فإن:

$$\left(\frac{ب^{م}\, هـ^{ل} ....}{و^{د}\, ك^{س} ....}\right)^{ن} = \frac{ب^{ن م}\, هـ^{ن ل} ....}{و^{ن د}\, ك^{ن س} ....}$$ حيث إن أيًا من عوامل المقام ≠ ٠



اختصر كلا مما يأتي لأبسط صورة:

(١) $\sqrt{٢} \times (\sqrt{٢})^{٢} \times (\sqrt{٢})^{٣}$ (٢) $\left((\sqrt{٢})^{٣} \times (-\sqrt{٢})^{٢}\right)^{٢}$ (٣) $\frac{(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{٣}}{(\sqrt{٣})^{٤}}$

الحل

(١) $\sqrt{٢} \times (\sqrt{٢})^{٢} \times (\sqrt{٢})^{٣} = (\sqrt{٢})^{١+٢+٣} = (\sqrt{٢})^{٦} = ٨$

(٢) $\left((\sqrt{٢})^{٣} \times (-\sqrt{٢})^{٢}\right)^{٢} = (٢\sqrt{٢} \times ٢)^{٢} = (٤\sqrt{٢})^{٢} = ١٦ \times ٢ = ٣٢$

(٣) $\frac{(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{٣}}{(\sqrt{٣})^{٤}} = (\sqrt{٣})^{٥+٣-٤} = (\sqrt{٣})^{٤} = ٩$

Scan me!

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



قوانين القوى الصحيحة السالبة فى ح

الوحدة الثانية

الدرس الثالث

فكّر وناقش

سوف تتعلم

- تعميم قوانين القوى الصحيحة غير السالبة والسالبة فى ح.

مصطلحات أساسية

- قوى صحيحة سالبة.
- مجموعة الأعداد الحقيقية ح

تعميم قوانين الأسس

إذا كان أ، ب $\in$ ح*، م، ن $\in$ ص فإن:

- $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$
- $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$
- $(أب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$
- $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$
- $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

ملاحظات:

(١) إذا كان أ $\in$ ح*، ن $\in$ ص+ فإن $أ^{ن}$، $أ^{-ن}$ كل منهما معكوس ضربى للآخر، $أ^{ن} \times أ^{-ن} = ١$

مثال: $(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{-٥} = ١$

(٢) إذا كان أ، ب $\in$ ح*، ن $\in$ ص+ فإن $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{-ن}$

مثال: $\left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\right)^{٥} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)^{-٥}$ ؛ حيث: $\left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\right)^{٥} \times \left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\right)^{-٥} = ١$

أمثلة

(١) أوجد فى أبسط صورة قيمة كل من:

أ) $٥ (\sqrt{٥})^{-١}$ ب) $\left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)^{-٤}$ جـ) $\frac{٢^{-١} \times ٤}{٣^{-١}}$

الحل

أ) $٥ (\sqrt{٥})^{-١} = \frac{٥}{\sqrt{٥}} = \frac{٥}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٥\sqrt{٥}}{٥} = \sqrt{٥}$

ب) $\left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)^{-٤} = \left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\right)^{+٤} = \frac{٤}{٩}$

جـ) $\frac{٢^{-١} \times ٤}{٣^{-١}} = \frac{٣ \times ٤}{٢} = ٦$

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

أ) إذا كان: $\left(\frac{٥}{٣}\right)^{س} = \frac{٢٧}{١٢٥}$ فإن س = ‏ (−٥، −٣، ٣، ٥)

ب) إذا كان $٢^{س} = ٥$ فإن $٨^{س} =$ ‏ (٥، ١٥، ٢٥، ١٢٥)

جـ) إذا كان $٧^{٤-٢س} = ١$ فإن س = ‏ (صفر، ١، ٢، ٣)

د) $\frac{٢^{٢ن+١} \times ٥^{٢ن+١}}{١٠^{٢ن}} =$ ‏ ($\frac{١}{١٠}$، ٧، ١٠، ١٠٠)

هـ) $\frac{٥^{س+٢} - ٥^{س+١}}{٥^{س}} =$ ‏ (٥، ١٠، ١٥، ٢٠)

الحل

أ) −٣ ب) ١٢٥ جـ) ٢ د) ١٠ هـ) ٢٠

٣ اختصر لأبسط صورة $\frac{(١٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٣} \times (٣)^{٣}}{٩ \times (\sqrt{٥})^{-٣}}$

الحل

المقدار $= \frac{(٣)^{-٢} \times (٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٣} \times (٣)^{٣}}{(٣)^{٢} \times (\sqrt{٥})^{-٣}} = (٣)^{-٢+٣-٢} \times (٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٣+٣}$

$= (٣)^{-١} \times (٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٦} = \frac{١}{٣} \times (٥)^{-٢} \times (٥)^{٣} = \frac{١}{٣} \times (٥)^{١} = \frac{٥}{٣}$

٤ إذا كان $\frac{٤٩^{ن} \times ٢٥^{٢ن} \times ٣^{٤ن}}{٧^{-ن} \times ١٥^{٤ن}} = ٣٤٣$ فأوجد قيمة $٦^{٢ن}$

الحل

∵ $\frac{٤٩^{ن} \times ٢٥^{٢ن} \times ٣^{٤ن}}{٧^{-ن} \times ١٥^{٤ن}} = ٣٤٣$ ∴ $\frac{٧^{٢ن} \times ٥^{٤ن} \times ٣^{٤ن}}{٧^{-ن} \times ٥^{٤ن} \times ٣^{٤ن}} = ٣٤٣$

∴ $٧^{٢ن+ن} = ٣٤٣$ ∴ $٧^{٣ن} = ٧^{٣}$

∴ ٣ن = ٣ ∴ ن = ١ ∴ $٦^{٢ن} = ٦^{٢\times١} = ٣٦$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

العمليات الحسابية باستخدام القوى الصحيحة

الوحدة الثانية
الدرس الرابع

فكّر وناقش

سوف تتعلم

- ☆ إجراء العمليات (+ ، − ، × ، ÷) على القوى الصحيحة.

مصطلحات أساسية

- ☆ قوى صحيحة غير سالبة.
- ☆ قوى صحيحة سالبة.
- ☆ ترتيب العمليات.

أولاً: أوجد فى أبسط صورة ناتج كلٍّ ممايأتى:

(١) $\frac{١}{(\sqrt{٣})^{٥}} \div ٩\sqrt{٣}$ (٢) $\frac{٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} - \frac{(\sqrt{٣})^{٣}}{٢\sqrt{٢}}$

سبق أن درسنا أن:

$\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ جـ}{ب د}$ (حيث كل من ب، د ≠ ٠)

$\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ د}{ب جـ}$ (حيث كل من ب، جـ، د ≠ ٠)

$\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د} = \frac{أ د + ب جـ}{ب د}$ (حيث كل من ب، د ≠ ٠)

$\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{د} = \frac{أ د - ب جـ}{ب د}$ (حيث كل من ب، د ≠ ٠)

ثانيًا: باستخدام الحساب العقلى أوجد: $٣ \times ٢^{٢} - ٦ \div ٣ \times ٥ + ٤$
وللتحقق من ذلك استخدم الآلة الحاسبة .



عند إجراء العمليات الحسابية يراعى ترتيب العمليات الآتية :

(١) إجراء العمليات داخل الأقواس الداخلية ثم الخارجية إن وجدت.

(٢) حساب قوى الأعداد.

(٣) إجراء عمليات الضرب أو القسمة من اليمين إلى اليسار.

(٤) إجراء عمليات الجمع أو الطرح من اليمين إلى اليسار.

وهذا هو نفس الترتيب المستخدم فى الآلات الحاسبة.

أمثلة



١ أوجد ناتج كلٍّ ممايأتى فى أبسط صورة:

أ $٢^{-٣} × ٣^{-٢} ÷ ٦^{-٤}$

ب $(\sqrt{٥})^{٥} ÷ ٥\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٣} × \sqrt{٣}$

الحل

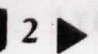
أ $٢^{-٣} × ٣^{-٢} ÷ ٦^{-٤} = ٢^{-٣} × ٣^{-٢} × ٦^{٤}$

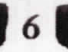
$= ٢^{-٣} × ٣^{-٢} × ٢^{٤} × ٣^{٤} = ٢^{-٣+٤} × ٣^{-٢+٤}$

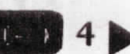
$= ٢^{١} × ٣^{٢} = ٢ × ٩ = ١٨$

وتستخدم الآلة الحاسبة للتأكد من صحة ناتج العملية السابقة على النحو الآتي:

ابدأ ← 2 3 3 ▶ 2 ▶ 6 4 ▶






ب $(\sqrt{٥})^{٥} ÷ ٥\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٣} × \sqrt{٣} = (\sqrt{٥})^{٥} ÷ (\sqrt{٥})^{٣} + ٢(\sqrt{٣})^{٢}$

$= (\sqrt{٥})^{٥-٣} + ٢ × ٣ = (\sqrt{٥})^{٢} + ٦ = ٥ + ٦ = ١١$

٢ إذا كان: $\frac{٣^{س} × ٨^{س}}{١٢^{س+١}} = \frac{١}{٣}$ فأوجد قيمة س

الحل

$\frac{٣^{س} × ٢^{٣س}}{(٣ × ٢^{٢})^{س+١}} = \frac{١}{٣}$

$\frac{٣^{س} × ٢^{٣س}}{٣^{س+١} × ٢^{٢س+٢}} = \frac{١}{٣}$

$٣^{س-س-١} × ٢^{٣س-٢س-٢} = \frac{١}{٣}$

$٣^{-١} × ٢^{س-٢} = \frac{١}{٣}$

$\frac{١}{٣} × ٢^{س-٢} = \frac{١}{٣}$

$٢^{س-٢} = ١$

$٢^{س-٢} = ٢^{٠}$

س − ٢ = ٠

س = ٢

٣ **إذا كان ا = $\sqrt{٢}$ ، ب = $\sqrt{٣}$ فأوجد القيمة العددية لكل من:**

ا $\frac{ب^٤ - ا^٤}{ب^٢ + ا^٢}$ ب $\frac{ا^٣ + ب^٣}{ا + ب}$

الحل

ا $\frac{ب^٤ - ا^٤}{ب^٢ + ا^٢} = \frac{(ب^٢ + ا^٢)(ب^٢ - ا^٢)}{ب^٢ + ا^٢}$

$= ب^٢ - ا^٢ = (\sqrt{٣})^٢ - (\sqrt{٢})^٢ = ٣ - ٢ = ١$

ب $\frac{ا^٣ + ب^٣}{ا + ب} = \frac{(ا + ب)(ا^٢ - ا ب + ب^٢)}{ا + ب} = ا^٢ - ا ب + ب^٢$ (ا ≠ − ب)

$= (\sqrt{٢})^٢ - \sqrt{٢} \times \sqrt{٣} + (\sqrt{٣})^٢ = ٢ - \sqrt{٦} + ٣ = ٥ - \sqrt{٦}$

٤ **أوجد قيمة س فى كل مما يأتى:**

أ) $(\frac{١}{٣})^{س-١} = ٢٧$ ب) $٧^{٢س-٣} = ١$

الحل

أ) ∵ $(\frac{١}{٣})^{س-١} = ٣^٣$

∴ $٣^{١-س} = ٣^٣$

∴ ١ − س = ٣

∴ س = −٢

ب) ∵ $٧^{٢س-٣} = ١$

∴ $٧^{٢س-٣} = ٧^٠$

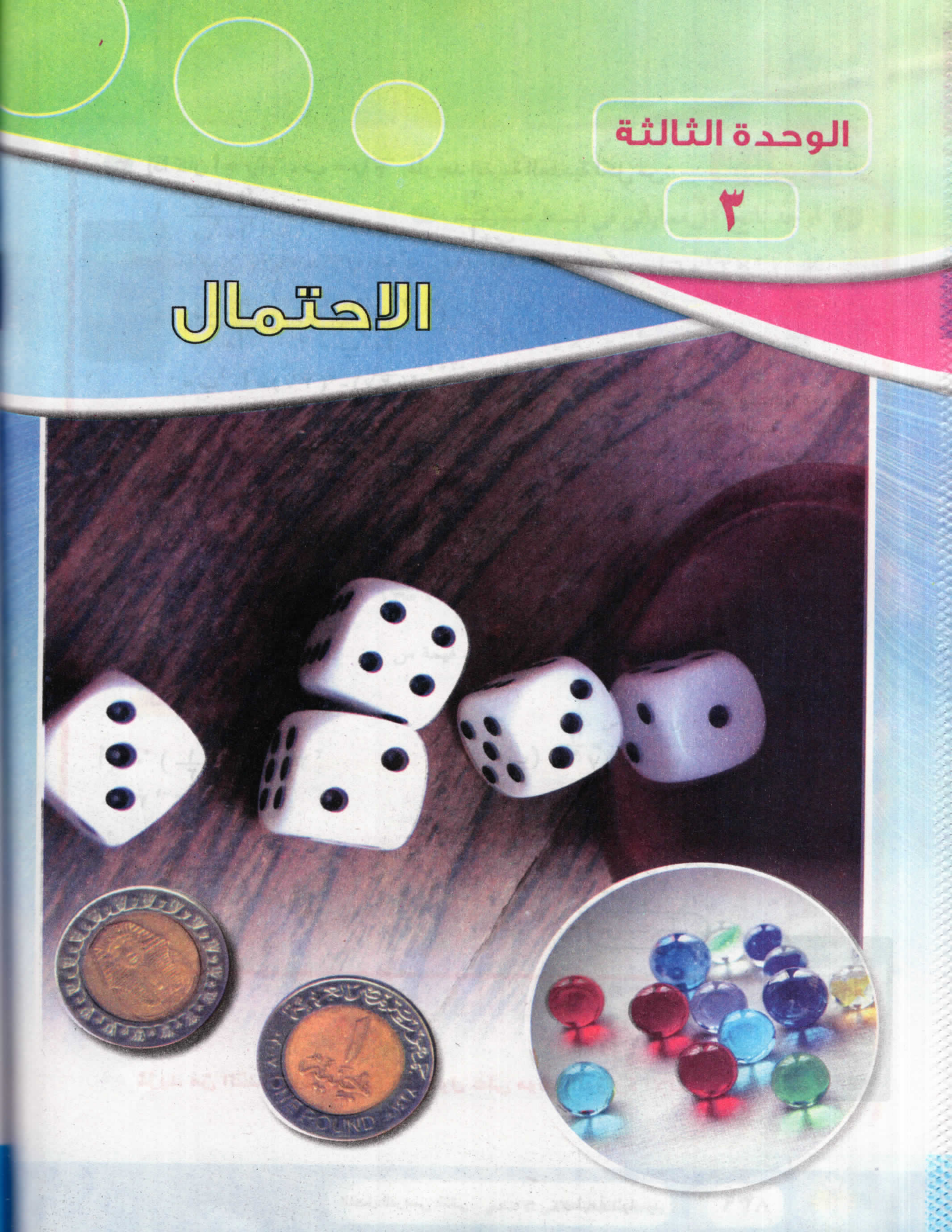
∴ ٢س − ٣ = ٠

∴ ٢س = ٣

∴ س = $\frac{٣}{٢}$



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني


الوحدة الثالثة
٣
الاحتمال



الاحتمال

فكّر وناقش

سبقَ أن عرفت بعضَ الإجراءات والأساليب الإحصائية التى تستخدم فى جمع وتنظيم البيانات التى تخصُّ ظاهرةً معينةً، وكيفية عرض هذه البيانات فى صورةٍ جدولية باستخدام جداول التَّوزيع التكرارى، والتوزيع التكرارى المتجمع (صاعد - نازل)، ثم عرض هذه البيانات فى صورة رسوم بيانية (مدرج تكرارى - مضلع تكرارى - منحنى تكرارى ...) أو غيرها من وسائل العرض البيانى.

كما أمكنك التعبيرُ عن هذه البيانات بصورةٍ موجزة بإيجاد الوسط الحسابى أو الوسيط أو المنوال لها، بهدفِ القيام بعمليةِ استدلالٍ إحصائىٍّ واتخاذ القرارات المناسبة.

سوف تتعلم
- معنى الاستدلال الإحصائى.
- مفهوم العينة.
- التَّجربة العشوائية.
- مصادرُ العينة.
- الحدث.
- مفهومُ الاحتمال.
- التنبؤ.

مصطلحات أساسية
- عينة.
- تجربةٌ عشوائية.
- مصادرُ العينة.
- حدث.
- احتمال.
- تنبؤ.

الاستدلالُ الإحصائىُّ:

هيا نفكّر

قبلَ الشروع فى إنشاء مصنع أو مشروع استثمارى نقومُ بدراسة جدوى اقتصادية للمشروع.

وعند مراقبةِ جودة الإنتاج لأحد المصانع تبين أن ٢٪ من إنتاج إحدى الآلات لايطابق مواصفاتِ الجودة المحددة (إنتاج معيب) مامعنى ذلك؟

تعدُّ دراسةُ الجدوى لمشروع هى عملية تنبؤٍ بأحداث مستقبلية لنجاح المشروع وتحقيق أهدافه، لذلك نقوم

بفرض فروضٍ معينةٍ عن موقع المشروع وتوافر مستلزمات التَّشغيل - حجمُ العمالة - منافذ تسويق المنتج ثم اختبار صحة هذه الفروض لاتخاذ القراراتِ المناسبةِ نحوَ إنشاءِ المشروع.

كما أن ٢٪ من إنتاج إحدى الآلات غير مطابقٍ للمواصفات المحددة، لايعنى أن لكلِّ ١٠٠ وحدة منتجة للآلة سنجدُ وحدتين معيبتين فى كلِّ الأحوال، بل قد نجدُ وَحْدةً واحدةً معيبةً أو ربما ثلاث أو أربع وحدات معيبة، أو لا نجد أى وحدةٍ معيبة على الإطلاق. ولهذا فإن نسبة ٢٪ هى متوسط الوحدات المعيبة عند فحص عددٍ كبيرٍ من العينات التى حجم كل منها ١٠٠ وحدة، وهو مايعبَّر عنه باحتمالِ أن تَنتج الآلة وحدة معيبة هو ٠,٠٢

لهذا نجد أن:

الاستدلالُ الإحصائىُّ يقومُ على فكرةِ اختيار عيِّنة من المجتمع الذى تمثله، ونجرى البحثَ على العينة،وما نحصلُ عليه من نتائج يتمُّ تعميمُه على المجتمعِ بأكمله، أى نستدلُّ على وجود النتائج فى المجتمع من خلالِ وجودها فى العينة المأخوذة منه.



فكر

ما أنواعُ العينات ؟ كيف يتمُّ اختيارُ عينةٍ عشوائيةٍ ؟ كيف يتمُّ اختيارُ عينةٍ منتظمةٍ ؟ لماذا نستخدمُ العيناتِ؟

مفهوم العينة

العينة هى جزءٌ صغيرٌ من مجتمع كبير، تشبه المجتمع وتمثِّله وتختارُ بطريقةٍ عشوائية، وتستخدم لتسهيل جمع البيانات عن المجتمع محلَّ الدراسة ، والتى تكون أقربَ إلى الواقع، ويمكن اتخاذُ القرارات فى ضوء نتائج دراسة هذه العينات ، ومن ثم يمكن تعميمُ هذه النتائج على المجتمع كله.

وتستخدم الاحتمالاتُ فى عمليةِ اتخاذ قرارٍ من مجموعة القرارات المتاحة ، والخاصَّة بالمشكلة (الظاهرة) محل الدراسة فى ظلِّ عدم التأكُّد أو فى مواجهة معلومات غير كاملة.

الاحتمال

سبق أن تعرَّفت على الاحتمالِ التَّجريبىِّ والنظرىِّ، ويعتمد الاحتمالُ التجريبىُّ على إجراءِ التَّجارب عمليًّا وتسجل النتائج ويحسب فيها الاحتمال بالعلاقة.

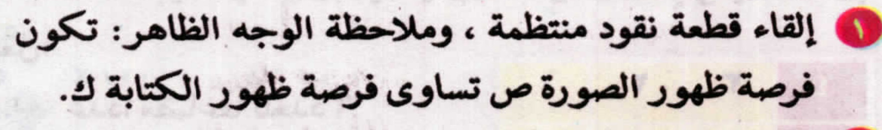
$$\text{احتمال حدوث نتيجة معينة} = \frac{\text{عدد مرات تكرار هذه النتيجة}}{\text{عدد جميع تكرارات النواتج الممكنة}}$$

وكلما زاد عددُ التَّجاربِ اقتربت قيمةُ الاحتمالِ التجريبى من الاحتمال النظرى ويكون:

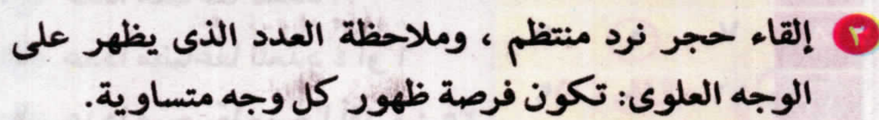
العدد المتوقع لحدوث نواتج معينة = احتمال حدوثها × العدد الكلى للمفردات المعطاة.

ويقوم الاحتمالُ النظريُّ على مبدأ تكافؤ الفرص أو تساوى الإمكانات فمثلاً عند:

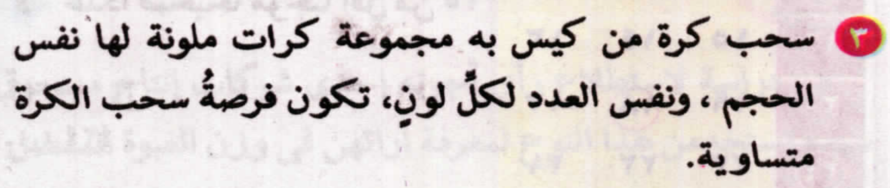




١ إلقاء قطعة نقود منتظمة ، وملاحظة الوجه الظاهر: تكون فرصة ظهور الصورة ص تساوى فرصة ظهور الكتابة ك.



٢ إلقاء حجر نرد منتظم ، وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى: تكون فرصة ظهور كل وجه متساوية.



٣ سحب كرة من كيس به مجموعة كرات ملونة لها نفس الحجم ، ونفس العدد لكلِّ لونٍ، تكون فرصةُ سحب الكرة متساوية.

٤ سحب بطاقة من مجموعة بطاقات متماثلة ، وملاحظة ما كتب عليها ... إلخ.

التجربةُ العشوائيةُ: هى تجربةٌ نستطيعُ معرفةَ جميعَ نواتجها الممكنة قبل إجرائها، ولكن لايمكن تحديدُ الناتج الذى سيحدث فعلاً.

فضاء العينة ف: هو مجموعةُ جميع النواتج الممكنة للتَّجربة العشوائية، وعدد عناصرها ن (ف)

الحدث: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة فإذا كان ا حدث فى ف فإن ا ⊂ ف، وعدد عناصره ن (ا) وهو عدد فرص وقوع الحدث ا

فيكون: احتمال وقوع أى حدث ا ⊂ ف، ويرمز له بالرمز ل (ا)

حيث:

$$ل\ (ا) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث (ا)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{ن\ (ا)}{ن\ (ف)}$$

لاحظ أن: ∵ ن (ا) ≤ ن (ف) ∴ $\frac{ن\ (ا)}{ن\ (ف)} \leqslant ١$

∵ ن (ا) ∈ ط، ن (ف) ∈ $ص_+$ ∴ $\frac{ن\ (ا)}{ن\ (ف)} \geqslant$ صفر

∴ $٠ \leqslant \frac{ن\ (ا)}{ن\ (ف)} \leqslant ١$ **أى أن** ٠ ≤ ل (ا) ≤ ١

مثال (١)

مجموعةُ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٢٤ خلطت جيدًا فإذا سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا، احسب احتمال أن تكون البطاقةُ المسحوبةُ تحمل:

١	٢	٣	٤
٥	٦	٧	٨
٩	١٠	١١	١٢
١٣	١٤	١٥	١٦
١٧	١٨	١٩	٢٠
٢١	٢٢	٢٣	٢٤

أ عددًا مضاعفًا للعدد ٤ ب عددًا مضاعفًا للعدد ٦

جـ عددًا مضاعفًا للعدد ٤ و ٦ معًا د عددًا مضاعفًا للعدد ٤ أو ٦

هـ عددًا يقبل القسمة على ٢٥ و عددًا صحيحًا موجبًا أقل من ٢٥

الحل

مجموعة فضاء النواتج = {١، ٢، ٣، ....، ٢٤}

ن (ف) = ٢٤

أ بفرض أن أ حدث ظهور عدد مضاعف للعدد ٤

∴ أ = {٤، ٨، ١٢، ١٦، ٢٠، ٢٤}

ن (أ) = ٦

ل (أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٦}{٢٤} = \frac{١}{٤}$

ب حدث ظهور عدد مضاعف للعدد ٦

ب = {٦، ١٢، ١٨، ٢٤} ، ن (ب) = ٤

ل (ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ف)} = \frac{٤}{٢٤} = \frac{١}{٦}$

جـ جـ حدث ظهور عدد مضاعف للعددين ٤، ٦ معًا.

جـ = {١٢، ٢٤} ، ن (جـ) = ٢

ل (جـ) = $\frac{ن(جـ)}{ن(ف)} = \frac{٢}{٢٤} = \frac{١}{١٢}$

د د حدث ظهور عدد مضاعف للعدد ٤ أو ٦

د = {٤، ٨، ١٢، ١٦، ٢٠، ٢٤، ٦، ١٨}

ن(د) = ٨

ل (د) = $\frac{ن(د)}{ن(ف)} = \frac{٨}{٢٤} = \frac{١}{٣}$

هـ هـ حدث أن يكون العدد يقبل القسمة على ٢٥ وهو حدث مستحيل، لماذا؟

هـ = ∅ ، ن (هـ) = صفر.

∴ ل (هـ) = صفر.

و س حدث ظهور عدد موجب أقل من ٢٥ وهو حدث أكيد لماذا؟

س = {١، ٢، ٣، ....، ٢٤}

∴ ن (س) = ٢٤ = ن (ف)

ل (س) = $\frac{ن(س)}{ن(ف)} = \frac{ن(ف)}{ن(ف)} = ١$

فى المثال السابق لاحظ أن:

١ الحدث المستحيل (∅): هو حدث لايمكن وقوعه. **احتمال الحدث المستحيل = صفر.**

٢ الحدث المؤكد (ف): هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة. **احتمال الحدث المؤكد = ١**



ويمكن توضيحُ ذلك بالرسم المقابل

حيث ل (أ) ∈ [٠، ١] كما يمكن كتابةُ الاحتمالِ في صورةِ كسرٍ عشريٍّ أو صورة نِسبةٍ مئويةٍ.

حدث مستحيل — حدث مؤكد

٠	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{٣}{٤}$	١
	٠,٢٥	٠,٥٠	٠,٧٥	
٪ ٠	٪ ٢٥	٪ ٥٠	٪ ٧٥	٪ ١٠٠



مثال (٢)

في دراسةٍ لاستطلاع رأي أجرته إحدى شركاتِ إنتاج مسحوق الغسيل على مجموعة مكونة من ٣٠٠ سيدة تستخدمن هذا النوع لمعرفة آرائهن في وزن العبوة المفضل لهن، كانت النتائج كالتالي:

الوزن بالجرام	١٢٥	٢٥٠	٣٧٥	٥٠٠	المجموع
عدد السيدات	١٢٠	٤٥	٩٦	٣٩	٣٠٠

أولاً: إذا تم اختيارُ إحدى السيدات عشوائيًّا، ما احتمالُ أن يكون الوزنُ المفضلُ لديها:

أ ١٢٥ جم　　ب ٢٥٠ جم　　جـ ٣٧٥ جم　　د ٥٠٠ جم

ثانيًا: بماذا تنصحُ مدير الشركة بناء على هذه الدراسة:

الحل

أولاً

أ احتمالٌ أن تفضل السيدة وزن ١٢٥ جم = $\frac{١٢٠}{٣٠٠}$ = $\frac{٤٠}{١٠٠}$ = $\frac{٢}{٥}$ = ٠,٤ = ٤ ٪

ب احتمالٌ أن تفضل السيدة وزن ٢٥٠ جم = $\frac{٤٥}{٣٠٠}$ = $\frac{١٥}{١٠٠}$ = $\frac{٣}{٢٠}$ = ٠,١٥ = ١٥ ٪

جـ احتمالٌ أن تفضل السيدة وزن ٣٧٥ جم = $\frac{٩٦}{٣٠٠}$ = $\frac{٣٢}{١٠٠}$ = $\frac{٨}{٢٥}$ = ٠,٣٢ = ٣٢ ٪

د احتمالٌ أن تفضل السيدة وزن ٥٠٠ جم = $\frac{٣٩}{٣٠٠}$ = $\frac{١٣}{١٠٠}$ = ٠,١٣ = ١٣ ٪

لاحظ أن:

١ يمكن كتابةُ الاحتمالِ على صورةٍ نسبة مئوية أو كسر عشرى أو كسر عادى

فإذا كان الاحتمال = $\frac{٣}{٢٠}$ فمثلاً فيكون الاحتمال = $\frac{٣}{٢٠}$ × (١٠٠) ٪ = ١٥٪

ثانيًا: اكتب نصائحك لمدير الشركة ، وناقش زملاءك ، واحفظ التَّقرير بكراسة الفصل .



مثال (٣)

وجدت شركةُ تأمين على الحياةِ أن من بين عينة تشملُ ١٠٠٠٠ رجل بين سن ٤٠ وسن ٥٠ عامًا، بلغت حالات الوفاة ٦٧ حالة خلال عام واحد.

أ ما احتمالُ أن يتوفى رجلٌ بين سن ٤٠ وسن ٥٠ خلال عام واحد؟

ب لماذا تهتمُّ شركاتُ التأمين بهذه النتائج؟

جـ إذا قامت الشركةُ بالتأمين على ٥٠٠٠٠ رجل بين سن ٤٠، سن ٥٠ فما عددُ حالات استحقاق وثيقة التأمين خلال عام واحد؟

الحل

أ احتمالُ الوفاة = $\frac{٦٧}{١٠٠٠٠}$ = ٠,٠٠٦٧

ب تهتمُّ شركاتُ التأمين بالاحتمالِ التجريبى لتحديد قسط التأمين.

جـ عددُ حالاتِ الوفاة المتوقَّعة خلال عام = العددُ الكلىُّ للمؤمن عليهم × احتمال الوفاة

= ٥٠٠٠٠ × ٠,٠٠٦٧ = ٣٣٥

مثال (٤)

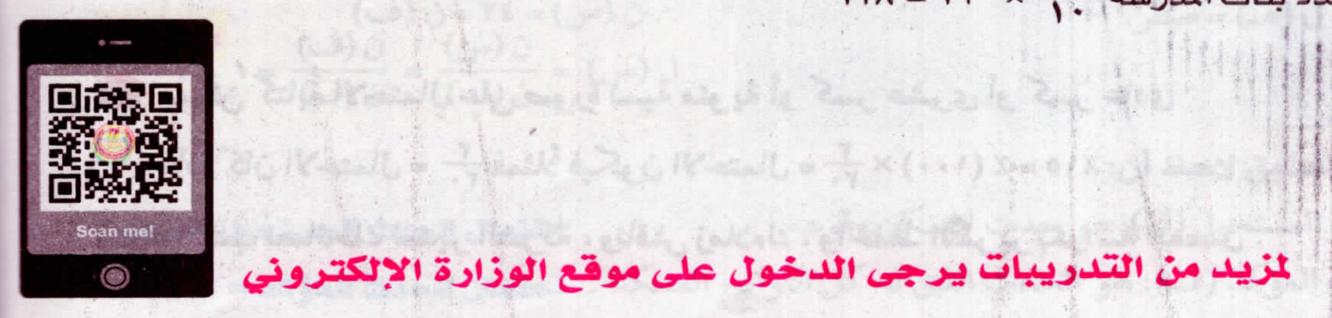
مدرسة بها ٣٢٠ تلميذاً وتلميذة إذا كان احتمال أن يكون التمليذ المثالى ولداً هو ٠,٦ فأوجد عدد بنات المدرسة؟

الحل

إذا كان احتمال أن يكون التلميذ المثالى ولداً = ٠,٦

فإن احتمال أن يكون التلميذ المثالى بنتاً = ٠,٤

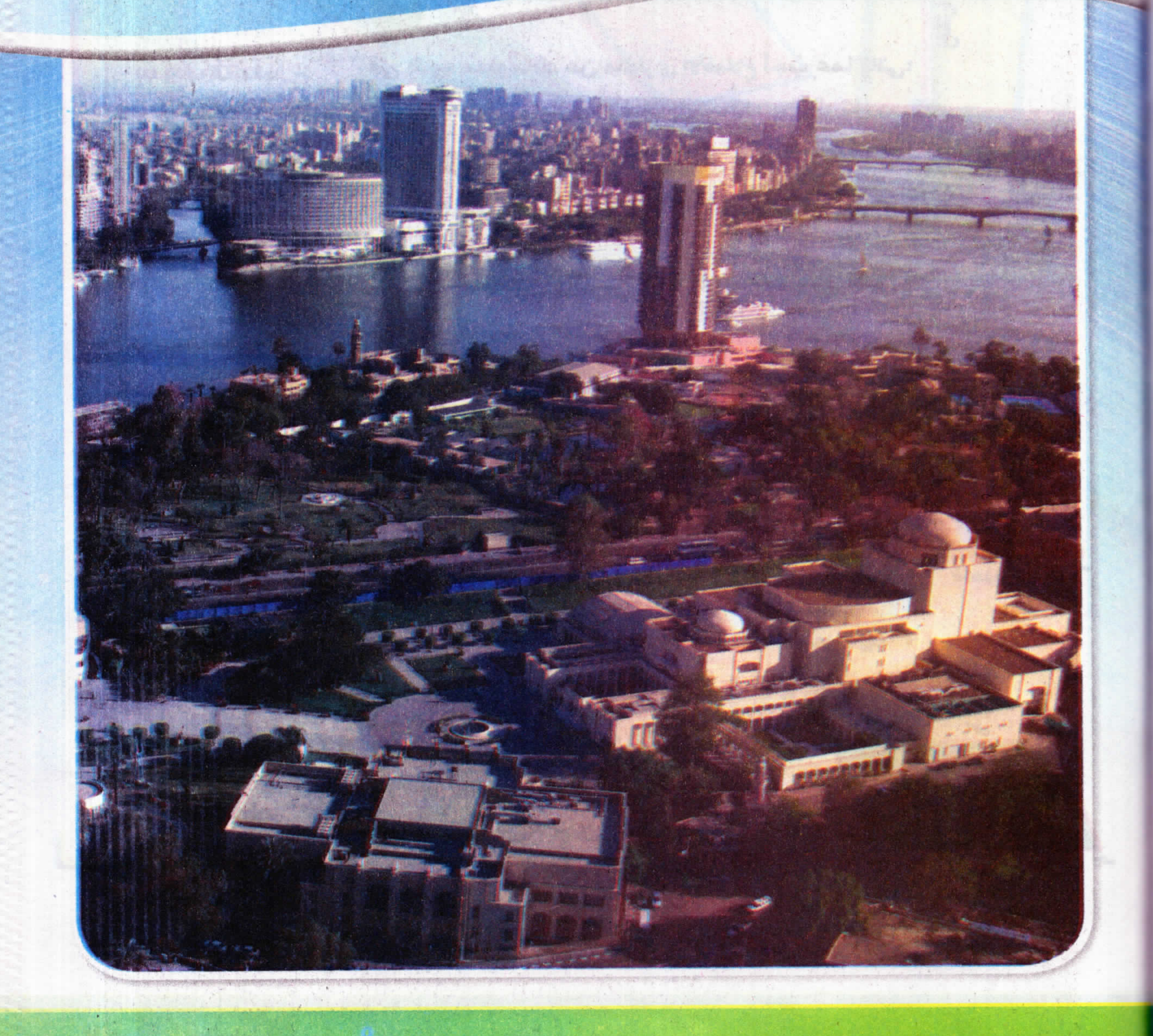
∴ عدد بنات المدرسة $\frac{٤}{١٠}$ × ٣٢٠ = ١٢٨



الوحدة الرابعة

٤

المساحات



الوحدة الرابعة

الدرس الأول

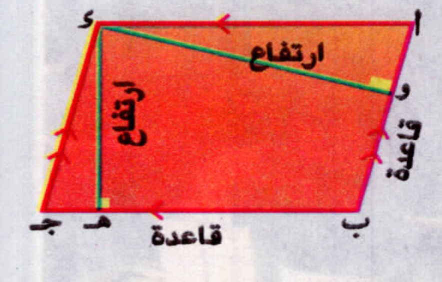
تساوى مساحتى متوازيى أضلاع

فكّر وناقِش

في ضوءِ معلوماتك عن متوازى الأضلاعِ أجبْ عما يأتى:

- ما تعريفُ متوازى الأضلاع؟
- ما خواصُّ متوازى الأضلاع؟
- هل البعدُ بين كلِّ مستقيمين متوازيين ثابت؟ وضح إجابتك بأمثلة حياتية.
- هل المستطيلُ والمعينُ والمربع حالاتٌ خاصةٌ من متوازى الأضلاع؟ ولماذا؟

ارتفاعُ متوازى الأضلاع:

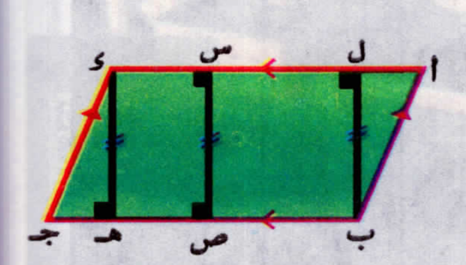


فى الشكلِ المقابل: أ ب جـ ء متوازى أضلاع إذا اعتبرنا $\overline{\text{ب جـ}}$ قاعدة له وكان $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ فيكون:

طول $\overline{\text{ء هـ}}$ ارتفاع مناظر للقاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$

و إذا اعتبرنا $\overline{\text{أ ب}}$ قاعدة لمتوازى الأضلاع، وكان $\overline{\text{ء و}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ فيكون:

طول $\overline{\text{ء و}}$ ارتفاع مناظر للقاعدة $\overline{\text{أ ب}}$



لاحظ أن: ارتفاعُ متوازى الأضلاع المناظر للقاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ يكون مساويًا لطول $\overline{\text{ء هـ}}$ حيث:

ء هـ = س ص = ب ل   لماذا؟

سوف تتعلَّم

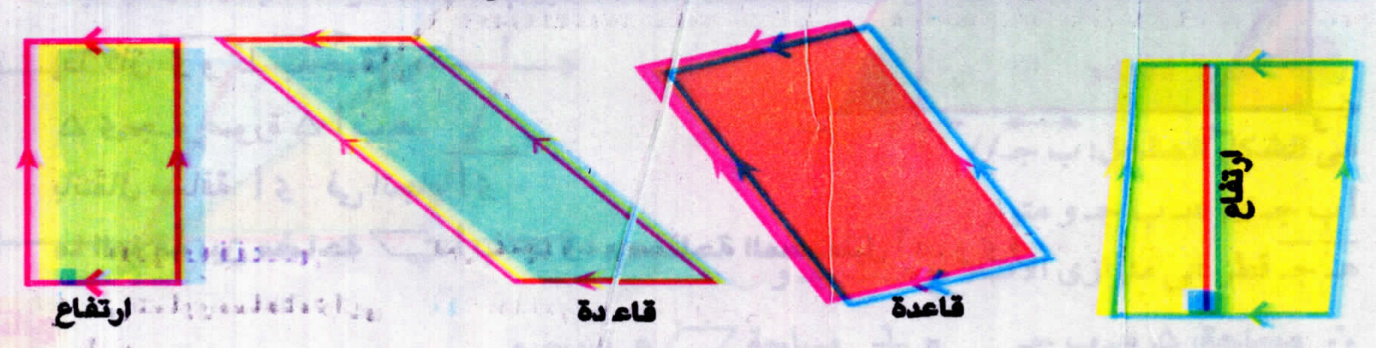
- متى تتساوى مساحتا متوازيى أضلاع.
- متى تتساوى مساحة متوازى أضلاع ومساحة مستطيل.
- كيفية إيجاد مساحة متوازى الأضلاع.
- العلاقة بين مساحة متوازى الأضلاع ومساحة المثلث المشترك معه فى القاعدة والمحصور معه بين مستقيمين متوازيين.
- كيفية إيجاد مساحة مثلث.

مصطلحات أساسية

- مساحة.
- متوازى أضلاع.
- مستطيل.
- مثلث.
- قاعدة.
- ارتفاع.
- مستقيمان متوازيان.

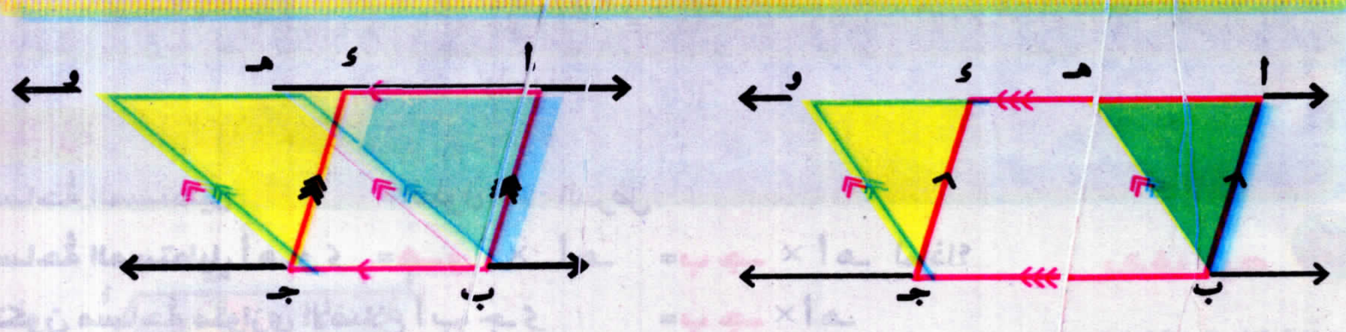


حدِّد القاعدةَ والارتفاعَ المناظر لها لكلٍّ من متوازيات الأضلاع التالية:



نظرية ١

سطحا متوازيي الأضلاع المشتركين في القاعدة والمحصورين بين مستقيمين متوازيين أحدهما يحمل هذه القاعدة متساويان في المساحة.



المعطيات: أ ب جـ ء ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع، ب جـ قاعدة مشتركة لهما، ب جـ // أ و

المطلوب: إثبات أن مساحة ▱ أ ب جـ ء = مساحة ▱ هـ ب جـ و

البرهان: ∵ △ ء جـ و صورة △ أ ب هـ بانتقال مسافة ب جـ في اتجاه ب جـ

∴ △ ء جـ و ≡ △ أ ب هـ لأن الانتقال تساوي قياسي

∴ مساحة الشكل أ ب جـ و - مساحة △ ء جـ و =

مساحة الشكل أ ب جـ و - مساحة △ أ ب هـ

∴ مساحة ▱ أ ب جـ ء = مساحة ▱ هـ ب جـ و

وهو المطلوب

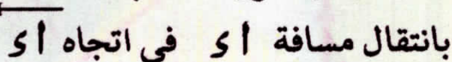
هيا نفكر

في الشكل المقابل:

أ ب جـ ى متوازي أضلاع ، $\overline{أهـ} \perp \overline{ب جـ}$

إذا كان $\overline{ى و} \perp \overleftarrow{ب جـ}$ فإن:

△ ى جـ و صورة △ أ ب هـ



بانتقال مسافة أ ى في اتجاه $\overleftarrow{أ ى}$

ما العلاقةُ بين مساحة ▱ أ ب جـ ى، ومساحة المستطيل أ هـ و ى ؟

نتائج



نتيجة ١

مساحةُ متوازي الأضلاع تساوي مساحة المستطيل المشترك معه في القاعدة والمحصور معه بين مستقيمين متوازيين

لاحظ أن:

مساحةُ المستطيل = الطول × العرض

مساحةُ المستطيل أ هـ و ى = هـ و × أ هـ = ب جـ × أ هـ لماذا؟

فتكون مساحةُ متوازي الأضلاع أ ب جـ ى = ب جـ × أ هـ



نتيجة ٢

مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع

لاحظ أن:

البعدُ بين مستقيمين متوازيين ثابت فإذا كان ب جـ = ص ل

فإن: مساحة ▱ أ ب جـ ى = ب جـ × البعد بين المستقيمين المتوازيين (ع)

مساحة ▱ س ص ل م = ص ل × البعد بين المستقيمين المتوازيين (ع)

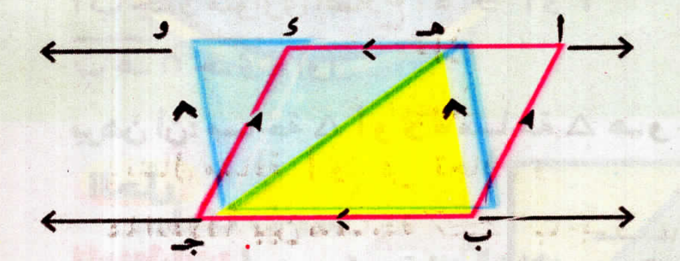
ماذا تستنتج؟



نتيجة ٣

متوازيات الأضلاع المحصورة بين مستقيمين متوازيين وقواعدها التي على أحد هذين المستقيمين متساوية في الطول تكون مساحاتها متساوية.

هيَّا نفكر



في الشكلِ المقابل: $\overleftrightarrow{بجـ} // \overleftrightarrow{أو}$ ،

أ ب جـ ء ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع

هـ جـ قطر في متوازي الأضلاع هـ ب جـ و

∴ مساحة △ هـ ب جـ = $\frac{1}{2}$ مساحة ▱ هـ ب جـ و

∴ مساحة ▱ هـ ب جـ و = مساحة ▱ هـ ب جـ و

∴ مساحة △ هـ ب جـ = $\frac{1}{2}$ مساحة ▱ أ ب جـ ء

نتيجة ٤

مساحة المثلث تساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والمحصور معه بين مستقيمين متوازيين أحدهما يحمل القاعدة المشتركة؟



هيا نفكر

في الشكل المقابل:

أ ب جـ ء متوازي أضلاع

مساحة △ هـ ب جـ = $\frac{1}{2}$ مساحة ▱ أ ب جـ ء

= $\frac{1}{2}$ × ل × ع



نتيجة ٥

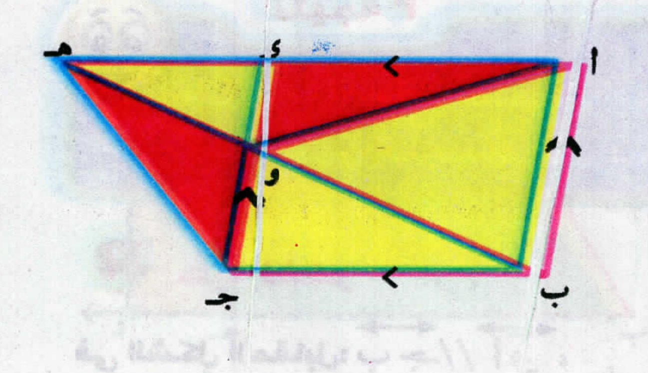
مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول قاعدته × ارتفاعه

لاحظ أن:

١. ارتفاعُ المثلث هو طولُ القطعة العموديَّة المرسومة من رأسِ المثلث إلى الضِّلع المقابل لها.
٢. المستقيمات التي تحمل القطع المستقيمة العمودية المرسومة من رؤوس المثلث إلى الأضلاع المقابلة لها تتقاطع في نقطة واحدة.



مثال



فى الشكلِ المقابل:

أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ،

$\overline{\text{ب هـ}}$ ∩ $\overline{\text{جـ ء}}$ = {و}

برهن أن: مساحة △ أ و ء = مساحة △ هـ و جـ

الحل

المعطيات: أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ∩ $\overline{\text{جـ ء}}$ = {و}

المطلوب: إثبات أن مساحة △ أ و ء = مساحة △ هـ و جـ

البرهان: ∵ مساحة △ أ و ب = $\frac{1}{2}$ مساحة ▱ أ ب جـ ء

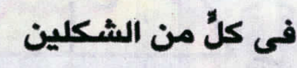
∴ مساحة △ أ و ء + مساحة △ ب و جـ = $\frac{1}{2}$ مساحة ▱ أ ب جـ ء (١)

∵ مساحة △ هـ ب جـ = $\frac{1}{2}$ مساحة ▱ أ ب جـ ء

∴ مساحة △ هـ و جـ + مساحة △ ب و جـ = $\frac{1}{2}$ مساحة ▱ أ ب جـ ء (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن:

مساحة △ أ و ء = مساحة المثلث هـ و جـ (وهو المطلوب)

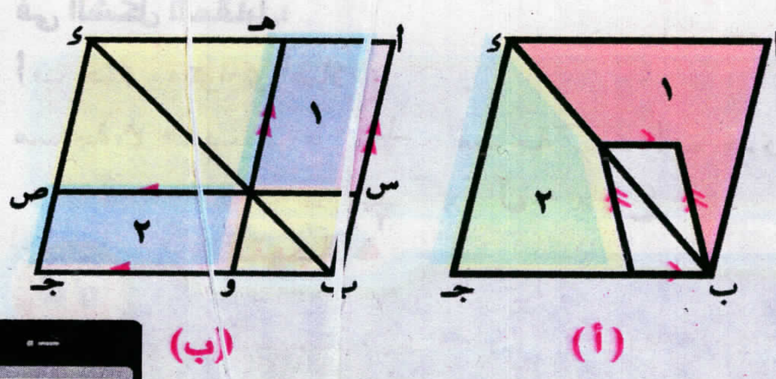


هيا نفكّر

فى كلٍّ من الشكلين

أ ب جـ ء متوازى أضلاع. (أ) ، (ب):

لماذا تكون مساحة الشكل (١) = مساحة الشكل (٢)؟



(أ) (ب)



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



تساوى مساحتى مُثلثين

فكر وناقش

إذا تطابق مثلثان، هل يتساويان فى المساحة؟ إذا تساوى مثلثان فى المساحة، هل يتطابقان؟ متى تتساوى مساحتا مثلثين؟

ء أ ، ٤سم ، جـ ٥سم ب ، هـ ٤سم ، و ٥سم س

سوف تتعلم

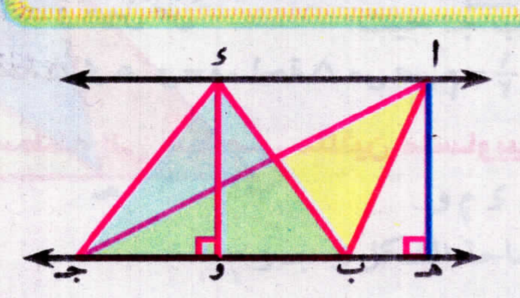
- متى يتساوى مساحتا مثلثين.

مصطلحات أساسية

- مساحة مثلث

نظرية ٢

المثلثانِ المرسومانِ على قاعدةٍ واحدةٍ ورأساهما على مستقيم يوازى هذه القاعدة يكونان متساويين فى المساحة.



المعطيات: $\overleftrightarrow{أ ء}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$

المثلثان: أ ب جـ، ء ب جـ يشتركان فى القاعدة $\overline{ب جـ}$

المطلوب: إثبات أن: مساحة △ أ ب جـ = مساحة △ ء ب جـ

العمل: نرسم $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overline{ء و}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{أ ء}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{ء و}$ عمودين على $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ أ هـ و ء مستطيل، أ هـ = ء و

∵ مساحة△ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ هـ **(١)**

، مساحة△ ء ب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × ء و = $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ هـ **(٢)**

من (١)، (٢) ∴ مساحة △ أ ب جـ = مساحة△ ء ب جـ

(وهو المطلوب)

مثال (١) :

١ في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{ءجـ}$ ، $\overline{اجـ} \cap \overline{بء} = \{م\}$



أكمل وفسر إجابتك:

ا مساحة △ ا ء ب = مساحة △ ا جـ ب لأن $\overline{اب}$ // $\overline{ءجـ}$

ب مساحة △ ء ا جـ = مساحة △ ء ب جـ لأن $\overline{اب}$ // $\overline{ءجـ}$

جـ مساحة △ ء ام = مساحة △ جـ ب م لماذا؟

نتائج

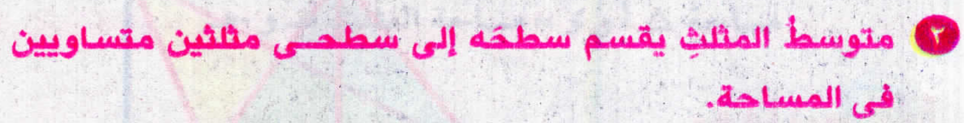


١ المثلثاتُ التي قواعدها متساويةُ الطولِ والمحصورة بين مستقيمين متوازيين تكون متساوية المساحة.

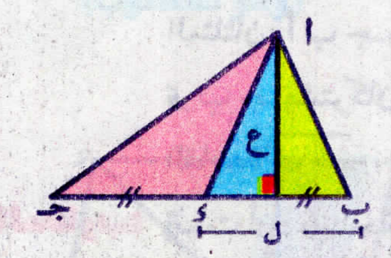
لاحظ أن:

$\overleftrightarrow{اص}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، ب جـ = هـ و = س ص

∴ مساحة △ ا ب جـ = مساحة △ ء هـ و = مساحة △ س ص م = $\frac{1}{2}$ ل × ع



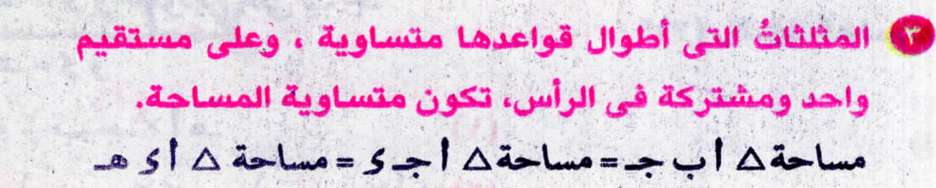
٢ متوسطُ المثلثِ يقسم سطحَه إلى سطحي مثلثين متساويين في المساحة.



لاحظ أن:

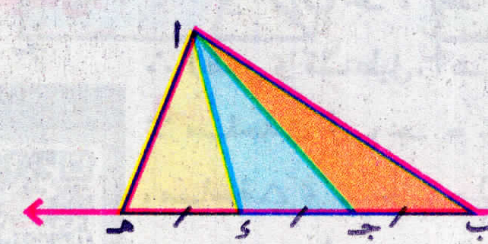
$\overline{اء}$ متوسط للمثلث ا ب جـ (ب ء = ء جـ = ل)

∴ مساحة △ ا ب ء = مساحة △ اء جـ = $\frac{1}{2}$ ل × ع

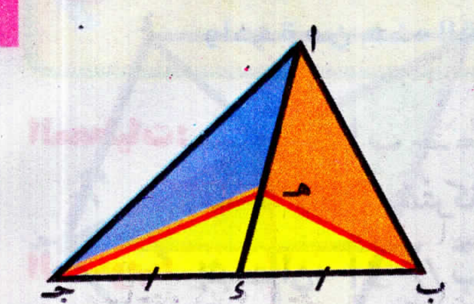


٣ المثلثاتُ التي أطوال قواعدها متساوية ، وعلى مستقيم واحد ومشتركة في الرأس، تكون متساوية المساحة.

مساحة △ ا ب جـ = مساحة △ ا جـ ء = مساحة △ ا ء هـ



مثال (٢) :



ا ب جـ مثلث فيه ا ء متوسط، هـ ∈ ا ء رسمت ب هـ ، جـ هـ

برهن أن: مساحة ∆ ا ب هـ = مساحة ∆ ا جـ هـ

البرهان:

∵ ا ء متوسط فى المثلث.

∴ مساحة ∆ ا ب ء = مساحة ∆ ا جـ ء (١)

∵ هـ ء متوسط فى ∆ هـ ب جـ

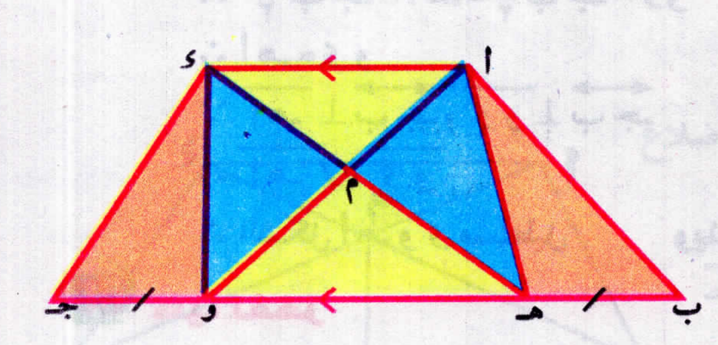
∴ مساحة ∆ هـ ب ء = مساحة ∆ هـ جـ ء (٢)

بطرح طرفى (٢) من طرفى (١) ينتج أن:

مساحة ∆ ا ب هـ = مساحة ∆ ا جـ هـ



مثال (٣):

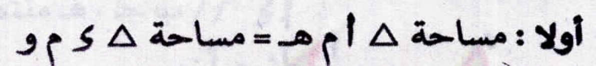


فى الشكل المقابل:

ا ء // ب جـ ، هـ ∈ ب جـ ، و ∈ ب جـ حيث:

ب هـ = جـ و ، ا و ∩ هـ ء = {م}

برهن أن:



أولا : مساحة ∆ ا م هـ = مساحة ∆ ء م و

ثانيًا: مساحة الشكل ا ب هـ م = مساحة الشكل ء جـ و م

البرهان:

∵ ا ء // هـ و ، المثلثان ا هـ و ، ء هـ و يشتركان فى القاعدة هـ و

∴ مساحة ∆ ا هـ و = مساحة ∆ ء هـ و

بطرح مساحة ∆ م هـ و من الطرفين.

مساحة ∆ ا هـ م = مساحة ∆ ء و م (١) (المطلوب أولاً)

∵ ب هـ = جـ و ، ا ء // ب جـ

∴ مساحة ∆ ا ب هـ = مساحة ∆ ء جـ و (٢)

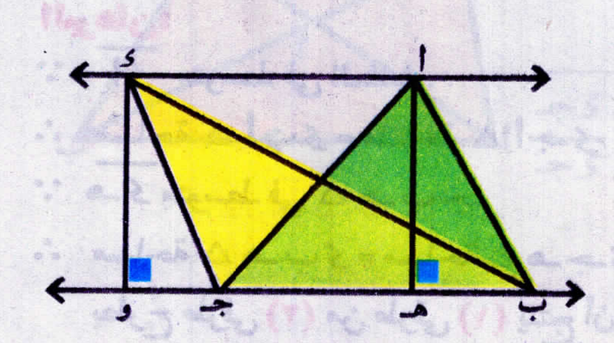
بجمع (١) ، (٢) ينتج أن:

مساحة الشكل ا ب هـ م = مساحة الشكل ء جـ و م (المطلوب ثانياً)



نظرية ٣

المثلثانِ المتساويان فى مساحتيهما ، والمرسومان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة من هذه القاعدة ، يكون رأساهما على مستقيم يوازى هذه القاعدة.



المعطيات: مساحة △ أ ب جـ = مساحة △ ء ب جـ.

ب جـ قاعدة مشتركة للمثلثين

المطلوب: إثبات أن: أ ء // ب جـ

العمل: نرسم أ هـ ⊥ ب جـ ، ء و ⊥ ب جـ

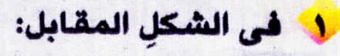
البرهان: ∵ مساحة △ أ ب جـ = مساحة △ ء ب جـ

∴ $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × ء و

∴ أ هـ = ء و



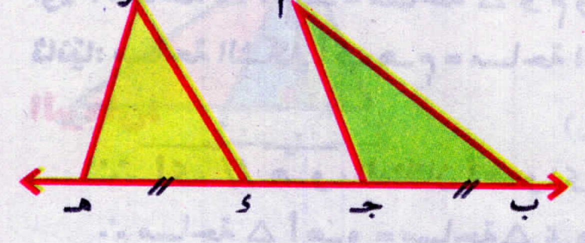
∵ أ هـ ⊥ ب جـ ، ء و ⊥ ب جـ



∴ أ هـ // ء و

∴ الشكل أ هـ و ء مستطيل **وينتج أن:** أ ء // ب جـ

هيا نفكر



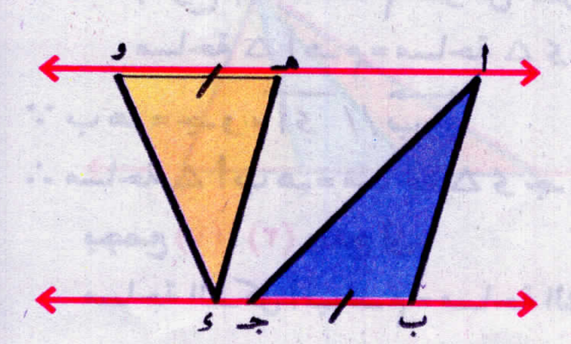
١ فى الشكلِ المقابل:

ب ، جـ ، ء ، هـ تقع على مستقيم واحد

حيث ب جـ = ء هـ

إذا كان: مساحة △ أ ب جـ = مساحة △ و ء هـ ماذا تستنتج؟ فسر إجابتك.

٢ فى الشكل المقابل: ء ∈ ب جـ ، أ ∈ و هـ ، ب جـ = هـ و



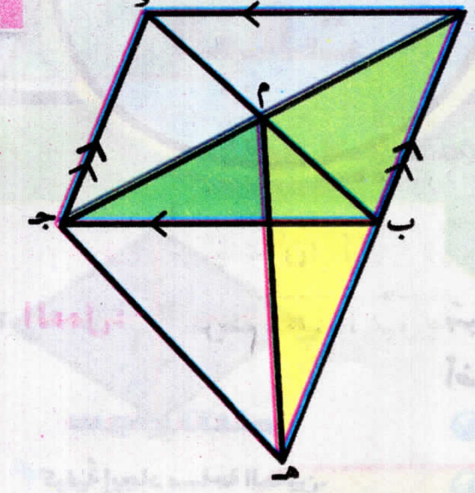
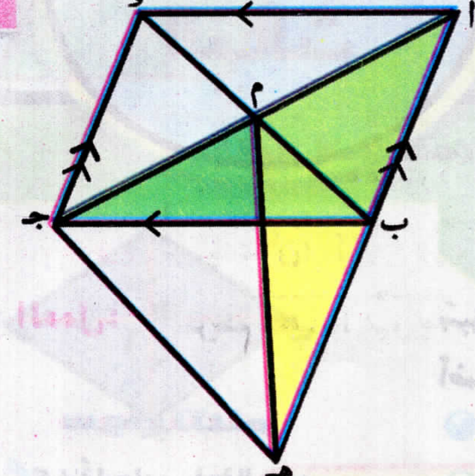
إذا كان:

مساحة △ أ ب جـ = مساحة △ ء هـ و

ماذا تستنتج؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن: أ و // ب جـ لماذا؟

مثال (١)

أ ب جـ ء متوازى أضلاع $\overline{أجـ} \cap \overline{بء} = \{م\}$

هـ $\in \overleftrightarrow{أب}$ بحيث: مساحة △ أ م هـ = مساحة △ أ ب جـ

برهن أن: الشكلَ ب هـ جـ ء متوازى أضلاع.

البرهان: ∵ مساحة △ أ م هـ = مساحة △ أ ب جـ

بطرح مساحة △ أ ب م من الطرفين

∴ مساحة △ ب م هـ = مساحة △ ب م جـ

وهما مشتركان فى القاعدة $\overline{ب م}$ وفى جهة واحدة منها

∴ $\overleftrightarrow{جـ هـ} // \overleftrightarrow{ب م}$ (١)

∵ الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ $\overleftrightarrow{ب هـ} // \overleftrightarrow{ء جـ}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن الشكل ء ب هـ جـ متوازى أضلاع

مثال (٢)

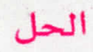
فى الشكل المقابل:

$\overline{أء} // \overline{ب جـ}$ ، هـ منتصف $\overline{ب جـ}$

أثبت أن:

أولاً: مساحة △ أ م ب = مساحة △ ء م جـ

ثانياً: مساحة الشكل أ ب هـ م = مساحة الشكل د جـ هـ م



الحل

∵ △ أ ب جـ، △ ء ب جـ مرسومان على قاعدة واحدة $\overline{ب جـ}$ ورأساهما على $\overleftrightarrow{أء} // \overline{ب جـ}$

∴ مساحة △ أ ب جـ = مساحة △ ء ب جـ بطرح مساحة △ م ب جـ من الطرفين

∴ مساحة △ أ م ب = مساحة △ ء م جـ «١»

∵ $\overline{م هـ}$ متوسط فى △ م ب جـ

∴ مساحة △ م ب هـ = مساحة △ م جـ هـ «٢» بجمع «١»، «٢» ينتج أن :

∴ مساحة الشكل △ أ ب هـ م = مساحة الشكل △ ء جـ هـ م



مساحات بعض الأشكال الهندسية

فكّر وناقش

سَبق أن عَرَفت أنَّ المعيَّن هو متوازى أضلاعٍ أضلاعه متساوية الطول.

- ما العلاقةُ بين قُطرى المعين؟
- كيف تُوجِدُ مساحة المعين؟

سوف تتعلم

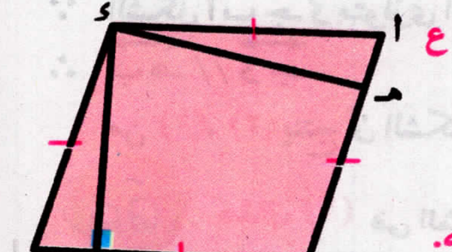
- كيفيةُ إيجاد مساحة المعين.
- كيفيةُ إيجاد مساحة المربع بمعلومية طول قطره.
- كيفيةُ إيجاد مساحة شبة المنحرف.

مصطلحاتٌ أساسيّة

- مربع.
- معين.
- شبة منحرف.
- مساحة.



مساحةُ المعين:



(١) إذا كان طولُ ضلعِ المعين ل وارتفاعُه ع

فإن: مساحة المعين = ل × ع

أى أن:

مساحةُ المعين = طول قاعدتِهِ × ارتفاعه.



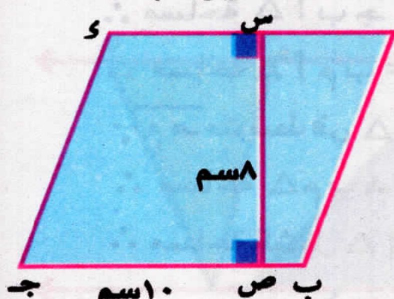
هيا نفكر

هل ء هـ = ء و؟ فسِّر إجابتك.



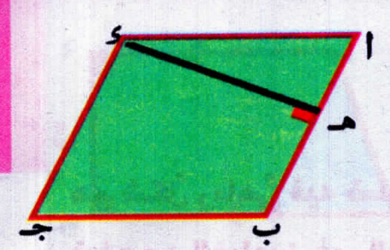
مثال (١)

١ فى كل من الشكلين التاليين : أوجِد مساحةَ المعين أ ب جـ ء



أ المساحةُ = ب جـ × س ص

= ١٠ × ٨ = ٨٠سم^2



ب محيطُ المعين أ ب جـ ء = ٢٤سم، ء هـ = ٥سم

طول ضلع المعين = ٢٤ ÷ ٤ = ٦ سم

∴ مساحة المعين = أ ب × ء هـ = ٦ × ٥ = ٣٠سم٢

٢ تعلم أنَّ قطرى المعين متعامدان وينصِّف كلٌّ منهما الآخر، لاحظ الشكل المقابل

مساحةُ المعين أ ب جـ ء = ٢ مساحة △ أ ب ء

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ ب ء × أ م

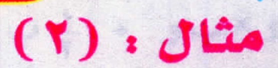
= $\frac{١}{٢}$ × ب ء × ٢ أ م

= $\frac{١}{٢}$ ب ء × أ جـ

أى أن: مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطريه.

∵ المربعُ هو معينٌ قطراه متساويان فى الطول.

∴ مساحةُ المربع = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره.

مثال : (٢)

أوجد مساحة المعين الذى طولا قطرية ٨ سم، ١٢ سم.

الحل

مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطرية

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ١٢

= ٤٨ سم٢



مثال : (٣)

أوجد مساحة المربع الذى طول قطره ١٠ سم

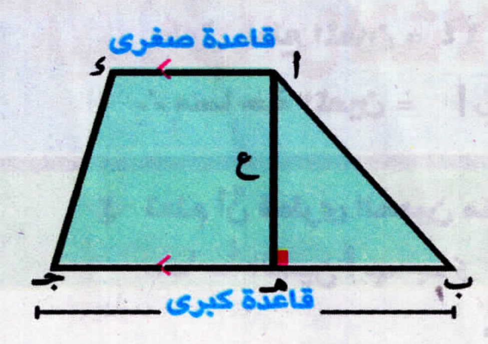
الحل

مساحة المربع = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره

= $\frac{١}{٢}$ × $(١٠)^{٢}$

= ٥٠ سم^{٢}

شبهُ المنحرف



هو شكلٌ رباعيٌ فيه ضلعان متوازيان يُعرفان بقاعدتيه ، ويسمى كلُّ ضلعٍ من الضلعين غير المتوازيين "ساقا".

فى الشكل المقابل: $\overline{\text{اى}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ **قاعدتا شبه المنحرف** اب جـ ى

$\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{ى جـ}}$ **ساقا شبه المنحرف** اب جـ ى

شِبهُ المنحرفِ له ارتفاعٌ واحدٌ هو البعْد العموديُّ بين قاعدتيهِ = ع




هيا نفكر

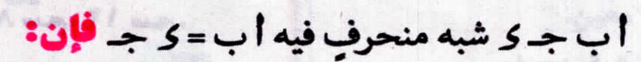
هل قطر شبه المنحرف يقسمه إلى مثلثينِ متساويين فى المساحة؟

إذا كان: اب جـ ى شبه منحرف متساوى الساقين $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{ى جـ}}$:

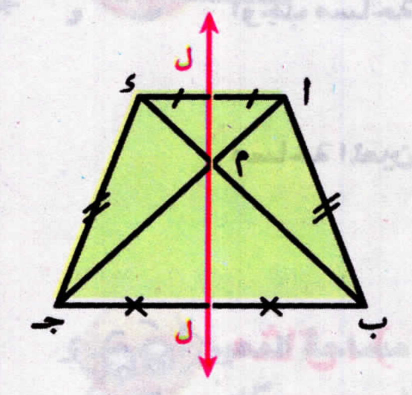
هل ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)؟

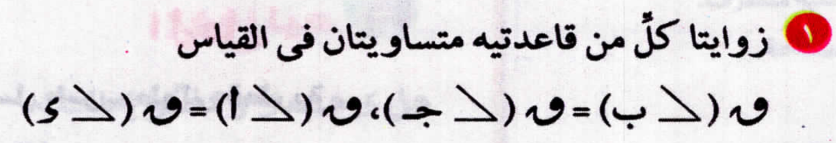
ارسم $\overline{\text{اهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ى و}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ وفسر إجابتك.

شبهُ المنحرفِ المتساوى الساقين:



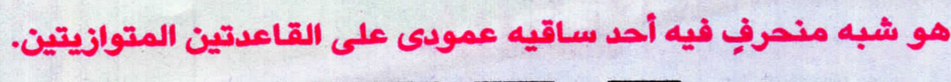
اب جـ ى شبه منحرفٍ فيه اب = ى جـ **فإن:**





1. زوايتا كلٍّ من قاعدتيه متساويتان فى القياس
   ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)، ق (∠ ا) = ق (∠ ى)
2. قطراه متساويان فى الطول ا جـ = ب ى
   $\overline{\text{ا جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ى}}$ = {م}
   ∴ ا م = ى م ، ب م = جـ م
3. له محور تماثلٍ واحدٍ (ل) ينصِّف قاعدتيه.

شبهُ المنحرف القائم الزاوية



هو شبه منحرفٍ فيه أحد ساقيه عمودى على القاعدتين المتوازيتين.

فى الشكلِ المقابل: $\overline{\text{ء جـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}} \perp \overline{\text{أ ء}}$ ،

∴ ارتفاع شبه المنحرف = طول $\overline{\text{جـ ء}}$

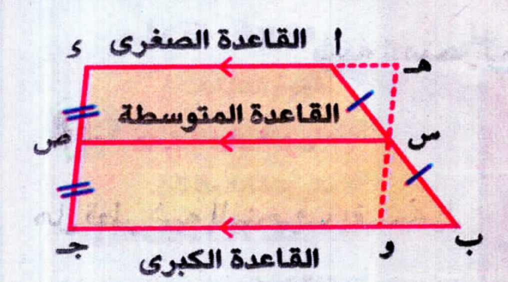
القاعدةُ المتوسطةُ لشبه المنحرفِ.

هى القطعةُ المستقيمةُ $\overline{\text{س ص}}$ الواصلةُ بين منتصفى الساقين فى شِبه المنحرفِ أ ب جـ ء.

لاحظ أن:

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$

طول $\overline{\text{س ص}}$ = $\frac{1}{2}$ (أ ء + ب جـ)



مساحةُ شِبهِ المنحرفِ:

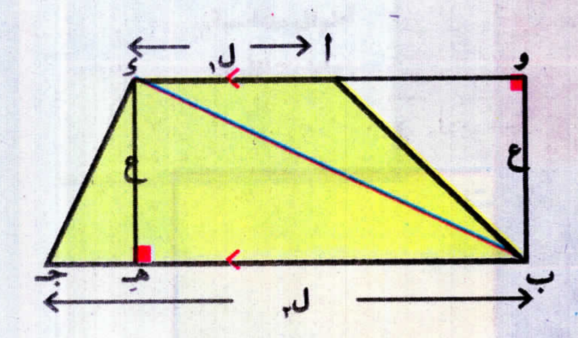
مساحةُ شِبهِ المنحرف أ ب جـ ء =

مساحة △ أ ب ء + مساحة △ ء ب جـ

= $\frac{1}{2}$ أ ء × ب و + $\frac{1}{2}$ ب جـ × د هـ

= $\frac{1}{2}$ $ل_1$ ع + $\frac{1}{2}$ $ل_2$ × ع

= $\frac{1}{2}$ ($ل_1$ + $ل_2$) ع



مساحةُ شبهِ المنحرفِ = $\frac{1}{2}$ مجموعُ طولى قاعدتيه المتوازيتين × الارتفاع.



لاحظ أن: طول القاعدة المتوسطةِ = $\frac{1}{2}$ مجموع طول القاعدتين المتوازيتين.

∴ مساحةُ شبهِ المنحرفِ = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع.

Scan me!

مثال : (٢)

أوجد مساحة شبه المنحرف الذي طولا قاعدتيه المتوازيتين ٥ سم، ٩ سم والبعد بينهما ٤ سم.

الحل

مساحة شبه المنحرف = $\frac{٥ + ٩}{٢}$ × ٤

= ٧ × ٤ = ٢٨ سم^2

لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني



الوحدة الخامسة
٥
التشابه
وعكس فيثاغورث واقليدس



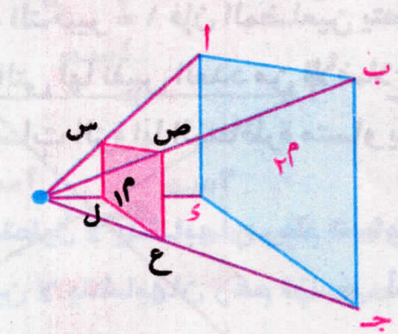
التشابه

فكر وناقش

في قاعةِ التطويرِ التكنولوجيِّ ، وأثناءَ عرضِ تمارين وتطبيقات على التحويلات الهندسية .

قال أسامة:

الانعكاسُ والانتقالُ والدورانُ هو تساوى قياسى ، لأن الشكلَ وصورته متطابقان، فيكون لهما نفس قياساتِ الأطوال المتناظرة، ونفس قياسات الزوايا المتناظرة.



قال أحمد:

رسومُ التمارينِ على شاشةِ العرض مشابهةٌ للواقع، لهما نفس قياسات الزوايا، ولكن الأطوال مكبرةٌ بنسبة ثابتة.

هل المضلعُ أ ب جـ د يشابه المضلعَ س ص ع ل؟ ولماذا؟

سوف تتعلم

- مفهومُ التشابه.
- متى يتشابه مضلعان.
- متى يتشابه مثلثان.

مصطلحات أساسية

- تشابه.
- أطوال متناسبة.
- زوايا متناظرة.

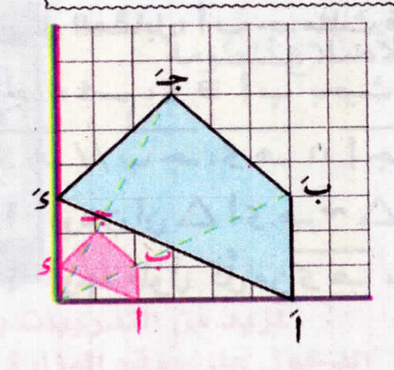
تعريف

يقال لمضلعينِ إنهما متشابهان إذا تحقَّق مايلى:

- زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس.
- أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.



مثال



فى الشكل المقابل

$\frac{أَبَ}{أب} = \frac{بَجـَ}{بجـ} = \frac{جـَءَ}{جـء} = \frac{أَءَ}{أء} = \frac{٣}{١}$ ،

ق (∠ أ َ) = ق (∠ أ)، ق (∠ ب َ) = ق (∠ ب)،
ق (∠ جـ َ) = ق (∠ جـ)، ق (∠ أ َ) = ق (∠ أ)

∴ الشكل أ ب جـ ء يشابه الشكل أ َ ب َ جـ َ ء َ

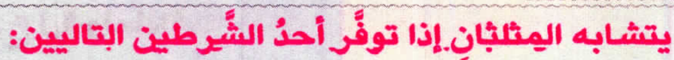
لاحظ أن:

1. يجب كتابةُ المضلعين المتشابهين بنفس ترتيب الرؤوس المتناظرة.
   فيكون الشكلُ أ َ ب َ جـ َ ء َ يشابه الشكل أ ب جـ ء ونستخدمُ العلامةَ (~) للتَّعبير عن التَّشابهِ فنكتب الشكل أ َ ب َ جـ َ ء َ ~ الشكل أ ب جـ ء.
2. تسمى النسبةُ الثابتةُ بين أطوال الأضلاع المتناظرة **بنسبةِ التَّكبير أو مقياس الرسم.**
   لاحظ أن: إذا كانت نسبةُ التكبير = ١ فإن المضلعين يتطابقان.
3. كلُّ المضلعاتِ المنتظمة التى لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة. لماذا؟
4. إذا تشابه مضلعان فإن قياساتِ الزوايا المتناظرة متساوية، أطوالُ الأضلاع المتناظرة متناسبة.

فكر المربعُ والمستطيلُ لا يتشابهان رغم تساوى قياسات زواياهما ... لماذا؟
المربع والمعين لا يتشابهان رغم تناسب أطوال أضلاعهما المتناظرة ... لماذا؟

تشابهُ المثلثين

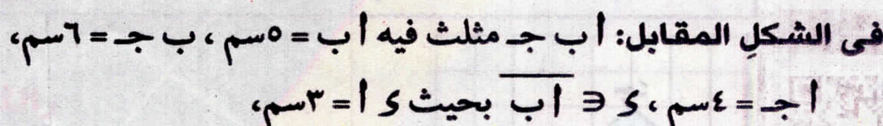
تعريف


يتشابه المثلثانِ إذا توفَّر أحدُ الشَّرطين التاليين:

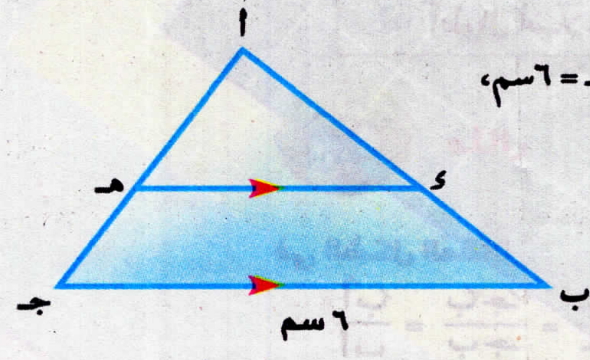
- الزوايا المتناظرة متساويةٌ فى القياس.
- أطوالُ الأضلاعِ المتناظرة متناسبة.


مثال


فى الشكلِ المقابل: أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٥سم ، ب جـ = ٦سم،


أ جـ = ٤سم ، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث ء أ = ٣سم،
$\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ∩ $\overline{\text{أ جـ}}$ = {هـ}

أ) برهن أن △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ.
ب) أوجد طولَ كلٍّ من $\overline{\text{ء هـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$



الحل

∵ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ ق (∠ ا ء هـ) = ق (∠ ب) ، ق (∠ ا هـ ء) = ق (∠ جـ) لماذا؟

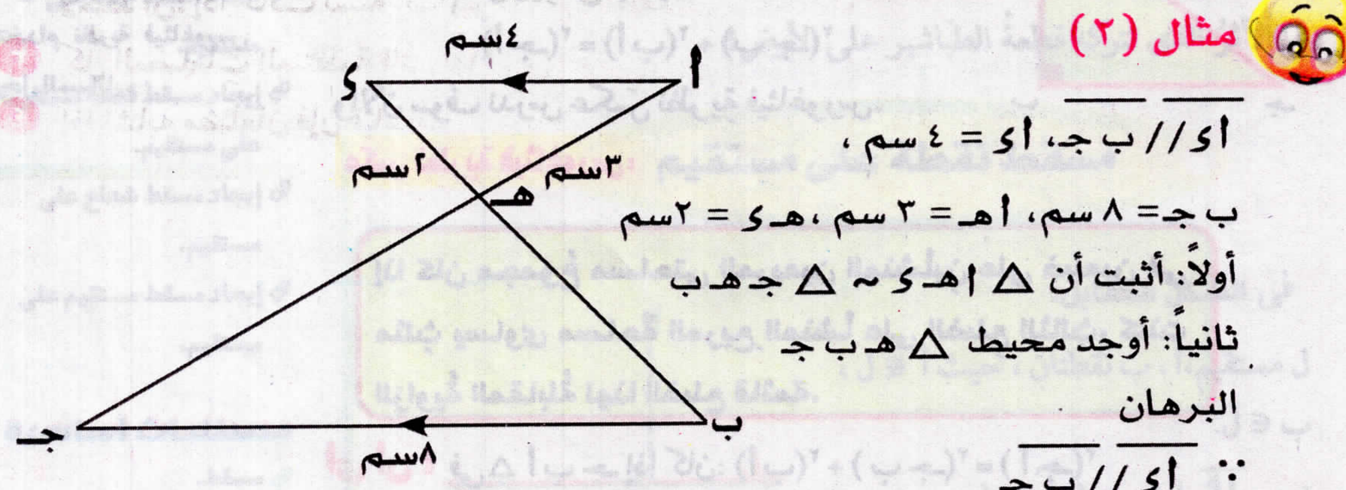
∵ ∠ ا مشتركة فى كلٍّ من المثلثين ا ء هـ ، ا ب جـ

∴ △ ا ء هـ ~ △ ا ب جـ لتساوى قياسات الزوايا المتناظرة ، وينتج أن:

$\frac{اء}{اب} = \frac{ءهـ}{ب جـ} = \frac{اهـ}{اجـ}$ ∴ $\frac{٣}{٥} = \frac{ءهـ}{٦} = \frac{اهـ}{٤}$

$ءهـ = \frac{٣ \times ٦}{٥} = ٣,٦$سم ، $اهـ = \frac{٣ \times ٤}{٥} = ٢,٤$سم

مثال (٢)



$\overline{اء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، اء = ٤ سم ،

ب جـ = ٨ سم، اهـ = ٣ سم ،هـ ء = ٢سم

أولاً: أثبت أن △ ا هـ ء ~ △ جـ هـ ب

ثانياً: أوجد محيط △ هـ ب جـ

البرهان

∵ $\overline{اء}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ ق (∠ ا) = ق (∠ جـ)، ق (∠ ء) = ق (∠ ب) بالتبادل

∵ ق (∠ ا هـ ء) = ق (∠ جـ هـ ب) بالتقابل بالرأس

∴ △ ا هـ ء ~ △ جـ هـ ب

∴ $\frac{اهـ}{جـ هـ} = \frac{هـ ء}{هـ ب} = \frac{ءا}{ب جـ}$

بالتعويض عن أطوال الأضلاع المعلومة

∴ $\frac{٣}{جـ هـ} = \frac{٢}{هـ ب} = \frac{٤}{٨}$

∴ جـ هـ = ٦سم ، هـ ب = ٤سم

∴ محيط هـ ب جـ = ٤ + ٦ + ٨ = ١٨سم



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

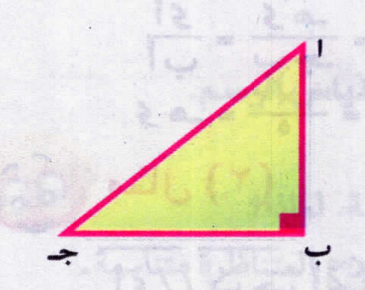
الوحدة الخامسة
الدرس الثانى

عكس نظرية فيثاغورث

فكر وناقش

سوف تتعلم

- عكس نظرية فيثاغورس.
- استخدام نظرية فيثاغورس فى حل المسائل.



علمنا من نظريةِ فيثاغورس أنه إذا كان أ ب جـ مثلثُ قائم الزاويةِ فى ب فإن:

(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢

والآن سوف ندرس عكسَ نظريةِ فيثاغورس.

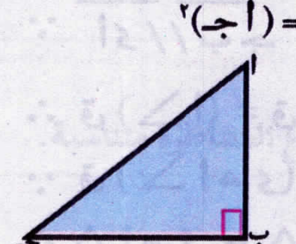
عكس نظرية فيثاغورس:

إذا كان مجموعُ مساحتى المربعينِ المنشأينِ على ضلعينِ فى مثلثٍ يساوى مساحةَ المربعِ المنشأ على الضلعِ الثالثِ، كانت الزاويةُ المقابلةُ لهذا الضلع قائمة.

أى أن : فى △ أ ب جـ إذا كان: (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ = (أ جـ)^٢

فإن : ق (∠ب) = ٩٠°

ويكون المثلث قائم الزاوية فى ب



ويمكنُ صياغة عكس نظريةِ فيثاغورس كمايلى:

إذا كان مربعُ طول ضلعٍ فى مثلثٍ يساوى مجموعَ مربعى طولى الضلعين الآخرين كانت الزاويةُ المقابلةُ لهذا الضلعِ قائمة.



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

نتيجة:

فى المثلث أ ب جـ **إذا كان:**

$\overline{\text{أ جـ}}$ أكبر الأضلاع طولا وكان (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ ≠ (أ جـ)^٢

فإن: △ أ ب جـ لايكون قائمَ الزاوية.





المساقط

فكر وناقش

عندما تسقط قطعة طباشير من يدك: هل تسقط راسيًا لاسفل (عمودية على الأرض)؟
ما الأثرُ الذى تتركه قطعةُ الطباشير على الأرض؟

سوف تتعلم

- إيجاد مسقط نقطة على مستقيم.
- إيجاد مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم.
- إيجاد مسقط شعاع على مستقيم.
- إيجاد مسقط مستقيم على مستقيم.

مصطلحات أساسية

- مسقط.
- نقطة.
- قطعة مستقيمة.
- شعاع.
- خط مستقيم.

مسقط نقطة على مستقيم

فى الشكلِ المقابل:

ل مستقيم، أ ، ب نقطتان ، حيث أ ∌ ل ،
ب ∈ ل.
نرسم $\overline{أأ'}$ ⊥ ل حيث أ' ∈ ل.
تسمى النقطة أ' (وهى موقع العمود المرسوم من النقطة أ على المستقيم ل) **بالمسقط العمودى** للنقطة أ على المستقيم ل.

∵ ب ∈ ل ∴ مسقط ب على المستقيم ل هو نفس النقطة ب.

لاحظ أن:

- **مسقطُ نقطةٍ على مستقيمٍ هو موقعُ العمود المرسوم من هذه النقطة على المستقيم.**
- **إذا كانت النقطةُ تقعُ على المستقيمِ فإن مسقطها على هذا المستقيم هو نفس النقطة.**

مسقطُ قطعة مستقيمة على مستقيمٍ معلوم

لإيجاد مسقط القطعة المستقيمة أب على المستقيمِ ل.

إذا كانت : أَ مسقط أ على المستقيم ل

بَ مسقط ب على المستقيم ل

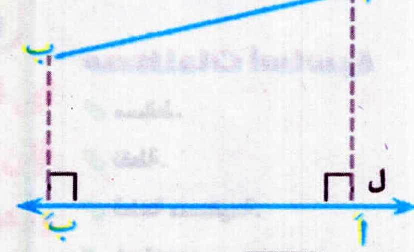
فإن : مسقط أب على المستقيم ل هو أَبَ

لاحظ أنه **إذا كانت:** جـ ∈ أب ، جـَ مسقط جـ على المستقيم ل

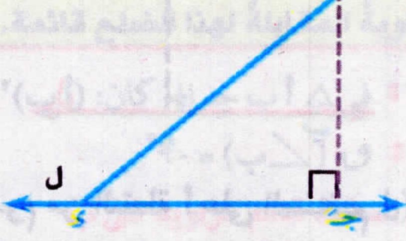
فإن : جـَ ∈ أَبَ

مثال :

الأشكالُ التالية تُبين بعضَ القطع المستقيمةِ فى أوضاعٍ مختلفةٍ، لاحظ مسقطِ القطعةِ المستقيمةِ فى كلِّ شكلٍ :

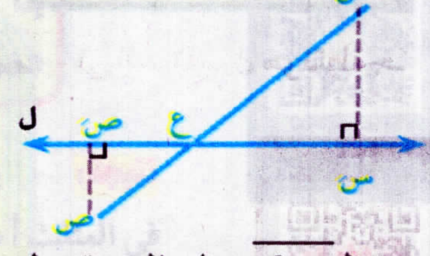


مسقط أب على المستقيم ل هو أَبَ

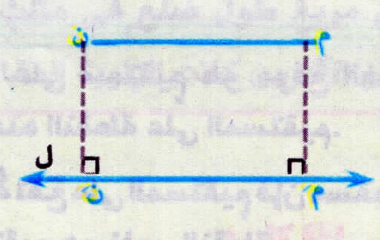


مسقط جـ د على المستقيم ل هو جـَ د

مسقط هـ و على المستقيم ل هو هـ وَ



مسقط س ص على المستقيم ل هو سَ صَ



مسقط م ن على المستقيم ل هو مَ نَ

مسقط أب على المستقيم ل هو النقطة جـ

لاحظ وناقش:

أ طولُ مسقطِ قطعةٍ مستقيمةٍ على مستقيمٍ معلومٍ يكون مساويًا أو أصغر من طولِ القطعةِ المستقيمةِ نفسها.

ب متى يكون طولُ مسقطِ قطعةٍ مستقيمةٍ على مستقيمٍ معلومٍ مساويًا طول هذه القطعة المستقيمة؟

جـ متى يكونُ طولُ مسقطِ قطعةٍ مستقيمةٍ على مستقيمٍ معلومٍ صفرًا؟

مسقطُ شعاعٍ على مستقيم

لإيجاد مسقط $\overleftarrow{\text{أب}}$ على المستقيم ل

لاحظ أن: أَ مسقط أ على المستقيم ل

ب َ مسقط ب على المستقيم ل

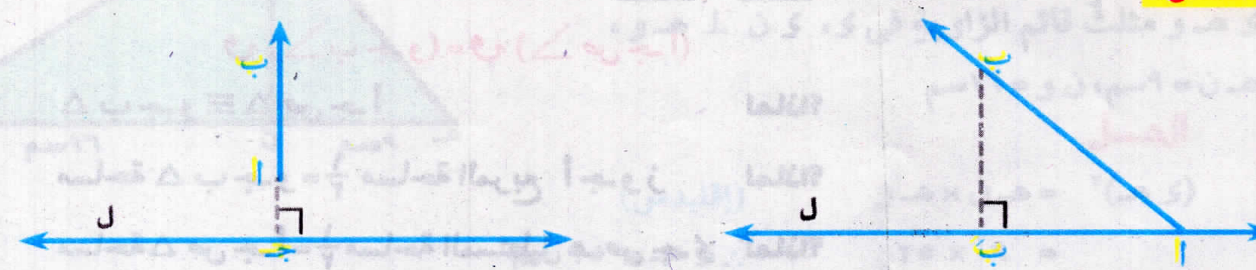
إذا كانت: ى $\in \overleftarrow{\text{أب}}$ ، ى $\notin \overline{\text{أب}}$

وكانت: ىَ مسقط ى على المستقيم ل.

فإن: ىَ $\in \overleftarrow{\text{أَبَ}}$

$\therefore$ مسقطُ $\overleftarrow{\text{أب}}$ على المستقيم ل هو $\overleftarrow{\text{أَبَ}}$

لاحظ أن:



مسقط $\overleftarrow{\text{أب}}$ على المستقيم ل هو $\overleftarrow{\text{أبَ}}$ وإذا كان $\overleftarrow{\text{أب}}$ ⊥ ل فإن مسقط $\overleftarrow{\text{أب}}$ على المستقيم ل هو نقطة جـ.

هيا نفكر

أ ما مسقطُ مستقيمٍ على آخر؟

ب هل يمكن أن يكون مسقطُ مستقيمٍ على آخر هو نقطة ؟

جـ وضح إجابتك برسمِ أشكالٍ مختلفة لمسقط مستقيمٍ على آخر ، واحفظها فى كراستك .



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

الوحدة الخامسة
الدرس الرابع

نظريةُ إقليدسَ

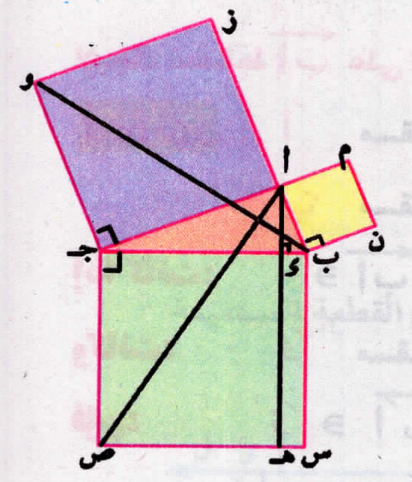
فكّر وناقش

سوف تتعلم

- نظريةُ إقليدس.
- تطبيقاتٌ على نظرية إقليدس.



الشكلُ المقابل:



١ أ ب جـ مثلثٌ قائم الزاوية فى أ، المربعات أ ب ن م، أ جـ و ز، ب س ص جـ منشأةٌ على أضلاعه.

٢ رسم $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ قطعها فى ى، وقطع $\overline{\text{س ص}}$ فى هـ، ورسمت $\overline{\text{ب و}}$، $\overline{\text{أ ص}}$ كما بالشكل.

لاحظ أن:

ق (∠ ب جـ و) = ق (∠ ص جـ أ)

△ ب جـ و ≡ △ ص جـ أ **لماذا؟**

مساحة △ ب جـ و = $\frac{1}{2}$ مساحة المربع أ جـ و ز **لماذا؟**

مساحة △ ص جـ أ = $\frac{1}{2}$ مساحة المستطيل هـ ص جـ ى **لماذا؟**

فيكون: مساحة المربع أ جـ و ز = مساحة المستطيل هـ ص جـ ى

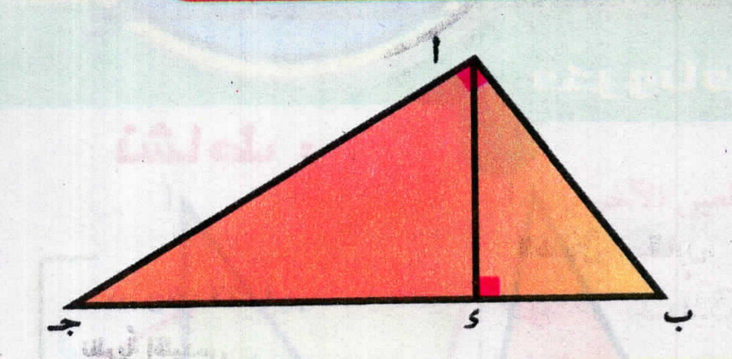
(أ جـ)^2 = جـ ى × جـ ص **لماذا؟**

∴ (أ جـ)^2 = جـ ى × جـ ب

= طول مسقط $\overline{\text{أ جـ}}$ × طول الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$

نظرية إقليدس:

> **مساحةُ المربعِ المنشأ على أحدِ ضلعى القائمةِ فى المثلثِ القائمِ الزاويةِ يساوى مساحةَ المستطيلِ الذى بُعداه هو مسقط هذا الضلع على الوترِ وطول الوتر.**



اى أن: فى المثلث أ ب جـ القائمِ الزاويةِ فى أ،

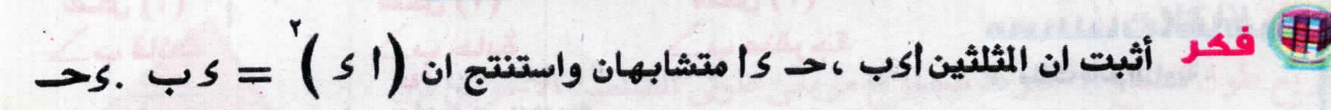
إذا رسمت $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ **فإن:**

$(ب أ)^2 = ب ء \times ب جـ$

$(جـ أ)^2 = جـ ء \times جـ ب$

نتيجة:

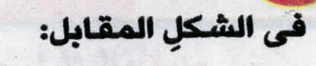
$$(أ ء)^2 = ء ب \times ء جـ$$



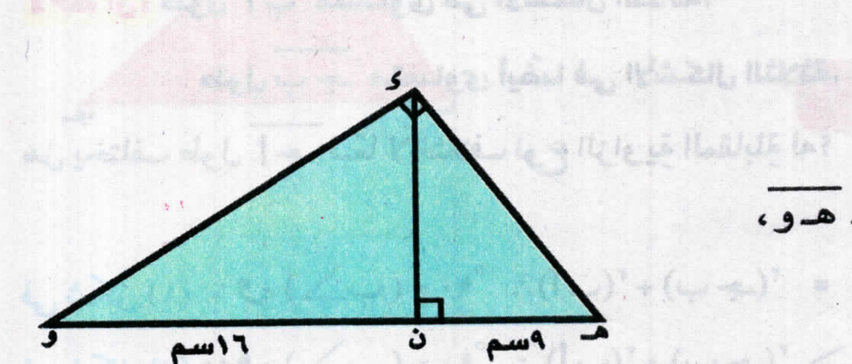
فكر أثبت ان المثلثين ا ء ب ، حـ ء ا متشابهان واستنتج ان $(ا ء)^2 = ء ب . ء حـ$



مثال



فى الشكلِ المقابل:



ء هـ و مثلثٌ قائم الزاويةِ فى ء، $\overline{ء ن} \perp \overline{هـ و}$،

هـ ن = ٩سم، ن و = ١٦سم



الحل

$(ء هـ)^2$ = هـ ن × هـ و (إقليدس)

= ٩ × ٢٥ ∴ ء هـ = ١٥ سم

$(ء و)^2$ = و ن × و هـ (إقليدس)

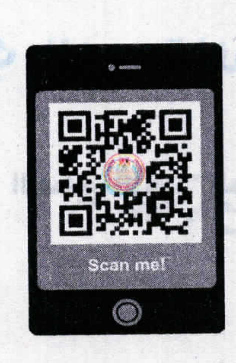
= ١٦ × ٢٥ ∴ ء و = ٢٠ سم

$(ء ن)^2$ = ن هـ × ن و (إقليدس)

= ٩ × ١٦ ∴ ء ن = ١٢ سم

هيا نفكر

هل ء ن × هـ و = ء هـ × ء و؟ ولماذا؟



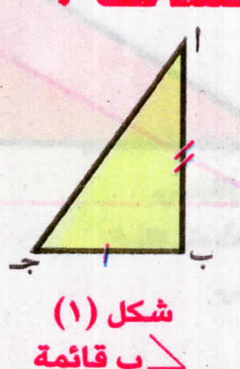
لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

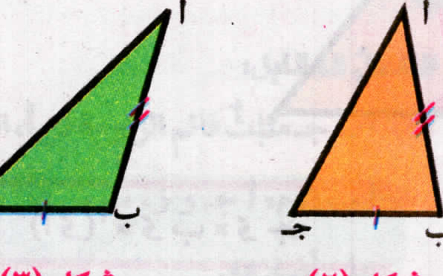
الوحدة الخامسة
الدرس الخامس

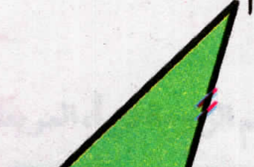
التعرف على نوع المثلث بالنسبة لزواياه

فكِّر وناقِش

نشاط :

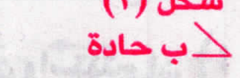






شكل (١) ∠ب قائمة

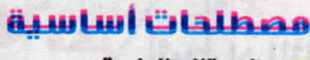
شكل (٢) ∠ب حادة



شكل (٣) ∠ب منفرجة

سوف تتعلم

- تحديد نوع المثلث بالنسبة لزواياه إذا علم أطوال أضلاعه الثلاثة.



مصطلحات أساسية

- مثلث قائم الزاوية .
- مثلث حاد الزوايا.
- مثلث منفرج الزاوية.

لاحظ أن: طول $\overline{أب}$ متساوى فى الأشكال الثلاثة.

طول $\overline{ب جـ}$ متساوى أيضًا فى الأشكال الثلاثة.

هل يختلف طول $\overline{أجـ}$ تبعًا لاختلاف نوعِ الزاويةِ المقابلةِ له؟

فى شكل (١) ∵ ق (∠ب) = ٩٠° ∴ (أب)^2 + (ب جـ)^2 = (أجـ)^2

فى شكل (٢) ∵ ق (∠ب) < ٩٠° ∴ (أب)^2 + (ب جـ)^2 > (أجـ)^2

فى شكل (٣) ∵ ق (∠ب) > ٩٠° ∴ (أب)^2 + (ب جـ)^2 < (أجـ)^2

كرر ذلك عدة مرات

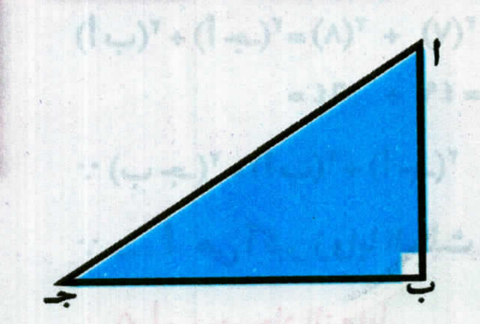
متى يكون ق (∠ب) = ٩٠°؟

تحديدُ نوع المثلثِ بالنسبةِ لزواياه متى علمت أطوال أضلاعه الثلاثة:

نُقارن بين مربع طول الضلع الأكبر للمثلثِ و مجموعِ مربعى طولى الضلعين الأخرين:

أولًا: إذا كان:

مربع طول الضلع الأكبر يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين فإن المثلث قائم الزاوية.

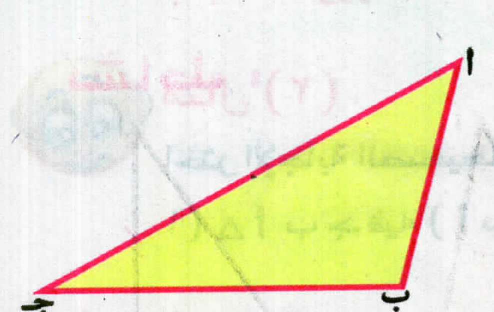


في △ أ ب جـ: (أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2

∴ ∠ ب قائمة

ثانيًا: إذا كان:

مربعُ طول الضلع الأكبر > مجموعِ مربعيِ طولى الضلعين الآخرين فإن المثلثَ يكون منفرج الزاوية.

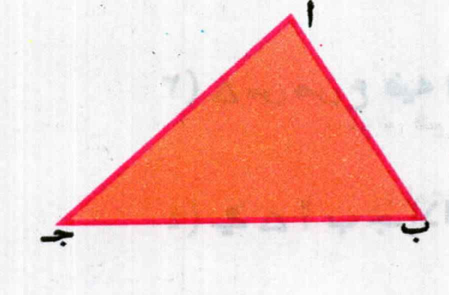


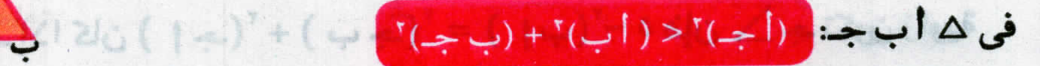
في △ أ ب جـ: (أ جـ)^2 > (أ ب)^2 + (ب جـ)^2

∴ ∠ ب منفرجة

ثالثًا: إذا كان:

مربع طول الضلع الأكبر < مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين فإن المثلث يكون حاد الزوايا.



في △ أ ب جـ: 
(أ جـ)^2 < (أ ب)^2 + (ب جـ)^2

∴ ∠ ب حادة والمثلث حاد الزوايا. لماذا؟

مثال (١)

حدد نوع الزاوية التى لها أكبر قياس فى المثلث أ ب جـ ، حيث:

أ ب = ٨سم ، ب جـ = ١٠سم ، جـ أ = ٧سم

وما نوع هذا المثلث بالنسبة لزواياه؟

الحل

∵ أكبر زوايا المثلث قياسا تقابل أكبر الأضلاع طولا.

∴ ∠ أ هى أكبر زوايا المثلث أ ب جـ فى القياس لأنها تقابل الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$

(ب جـ)^2 = (١٠)^2 = ١٠٠

$(أب)^2 + (أجـ)^2 = (٨)^2 + (٧)^2$

$= ٦٤ + ٤٩ = ١١٣$

∵ $(ب جـ)^2 < (أب)^2 + (أجـ)^2$ ∴ ∠ أ حادة

∵ ∠ أ هى أكبر زوايا المثلث

∴ △ أ ب جـ حاد الزوايا.

مثال (٢)

اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين:

١) △ أ ب جـ فيه $(أب)^2 + (ب جـ)^2 < (أجـ)^2$ فإن ∠ب تكون

(حادة، قائمة، منفرجة، مستقيمة)

٢) △ أب جـ منفرج الزواية فى أ فيه أب = ٥سم، ب جـ = ٨ سم فإن أ جـ =

(٥سم، ٧ سم، ٨ سم، ١٣ سم)

٣) △ س ص ع فيه $(س ع)^2 = (ص ع)^2 - (س ص)^2$ فإن س تكون زاوية

(حادة، قائمة، منفرجة، مستقيمة)

٤) فى △ أ ب جـ إذا كان $(أجـ)^2 + (ب جـ)^2 = (أب)^2 - ٥$ فإن ∠ جـ تكون زاوية

(حادة، قائمة، منفرجة، مستقيمة)

٥) المثلث المتساوى الساقين الذى طولا ضلعين فيه ٣سم ، ٤ سم تكون أكبر زواياه

(حادة، قائمة، منفرجة، مستقيمة)

الحل

١) منفرجة ٢) ٥

٣) قائمة ٤) منفرجة

٥) حادة



لمزيد من التدريبات يرجى الدخول على موقع الوزارة الإلكتروني

- الحضارة ليست أدوات نستعملها ونستهلكها وإنما أخلاق سامية نوظفها.
- الذين يفكرون ويشعرون ويعملون معًا يصنعون الحضارة.
- بالإرادة والعمل يتحقق النجاح.
- الحقوق والواجبات وجهان لعملة واحدة.
- للطفل حق في الحماية من كافة أشكال العنف أو الضرر أو إساءة المعاملة.







مطبعة الياسر

بسم الله الرحمن الرحيم

قام بإعداد هذه النسخة pdf
وفهرستها ورفعها :
د محمد أحمد محمد عاصم
نسألكم الدعاء